**Document de travail**

Contributions à la réunion du 21 septembre

R. Noirfalise

# 1° Viabilité du PGCD dans le système scolaire

Lors de la réunion de notre groupe, le vendredi 21 septembre, il m'a semblé que le PGCD est un objet mathématique qui a quelques difficultés à "vivre" dans le système scolaire. On peut comme le font les écologues (qui étudient les écosystèmes) se demander quel peut-être l'habitat ou la niche écologique qui autorise la vie du PGCD.

Pour cela le modèle praxéologique d'Y. Chevallard peut nous être utile : Nous avons un premier type de tâches, T1, typique associé au PGCD "déterminer le PGCD de deux ou plusieurs entiers". La question est alors : " Savoir effectuer ce premier type de tâches sert à la réalisation de quels autres types de tâches ?" Il s'agit ici de déterminer une chaîne en terme de types de tâches ("alimentaire " diraient les écologiques) motivant en fin de chaîne le calcul du PGCD.

1. **Le calcul du PGCD sert à réduire une fraction**: T2 = Réduire une fraction. A quoi sert la réduction d'une fraction? Nous avons déjà évoqué cette question les années passées. Il s'agit de donner à un nombre une forme canonique. L'intérêt d'une telle forme est d'autoriser la comparaison (T3) de deux nombres en comparant leurs écritures; deux fractions irréductibles sont égales si et seulement si elles ont la même écriture!

Avec T3, la comparaison de nombres, nous avons un habitat riche, nombre de problèmes intra ou extra mathématique faisant vivre ce type te tâches. Mais techniquement, le recours aux formes canoniques est-il aujourd'hui vraiment utile? On peut en douter, car la puissance de calcul des calculatrices rend cette technique quelque peu obsolète. Si deux nombres diffèrent, dans la plupart des cas, la calculatrice rendra deux décimaux différents et inversement si la calculatrice renvoie le même résultat décimal, les deux nombres sont égaux dans bien des cas fréquentés par les élèves, comme le montre la petite démonstration ci-dessous.

## Usage d’une calculatrice pour vérifier que des expressions numériques sont égales.

 Il n’est pas rare au collège que des élèves usent de leurs calculatrices pour vérifier que des fractions  et sont égales. S’ils obtiennent les mêmes valeurs décimales, ils concluent à l’égalité des deux fractions. Certes on peut évoquer une trentième décimale, laquelle n’est pas affichée et qui ne serait pas la même pour les deux fractions : cependant, nous allons le voir il est peu probable avec les valeurs numériques manipulées effectivement par les élèves[[1]](#footnote-1) qu’il en soit ainsi.

Demandons nous, et c’est un problème de nature mathématique, à quelles conditions sur les entiers a, b, c et d, l’égalité à la machine des deux fractions permet d’en inférer l’égalité effective des deux fractions.

Soit une machine, comme la TI 40 qui affiche 9 décimales.

Supposons a, b, c et d étant quatre entiers strictement positifs, que la machine affiche un même résultat numérique avec 9 chiffres après la virgule : 

Supposons néanmoins que 

Nous avons alors :  soit 0<⏐ad-bc⏐109< bd

Or ⏐ad-bc⏐n’étant pas nul et de surcroît entier, nous devons avoir bd>109.

Si donc, bd≤109, si nous avons  alors nous avons bien .

Nous avons fait l’hypothèse que la calculatrice donne pour les deux fractions 9 décimales après la virgule : s’il en est bien ainsi, il suffit par exemple d’avoir des dénominateurs inférieurs à 104 tous deux pour que cela marche.

Par ailleurs, Pour T2, il n'est pas nécessaire de passer par la recherche du PGCD du numérateur et du dénominateur: techniquement, on essaie d'abord des divisions par 2, puis par 3, etc… et ainsi on réduit la fraction. C'est la technique qui était préconisée dans de vieux manuels de collège jusqu'en 4e, je veux bien croire que c'est encore le cas aujourd'hui.

1. **Problèmes de doubles, multiples partages équitables[[2]](#footnote-2).**

Avec la division à l'école primaire, on aborde les problèmes de partage ; une collection, une grandeur g étant donnée, il s'agit de la partager en un nombre de parts égales et de déterminer la mesure de chaque part.

[*Une parenthèse suite à une discussion avec Annie qui mieux que moi connaît ce qui se fait au primaire: au primaire on distingue partage en parts égales et partage équitable! Partage en parts égales: on connaît la mesure de la part et on cherche le nombre de parts. Partage équitable: on connait le nombre de parts et on cherche la mesure de la part. Chacun de ces partages peut être exact ou avec reste. Dans ce qui nous préoccupe, on ne connaît ni le nombre de parts ni la mesure de chaque part mais on exige que la division soit exacte. La difficulté que nous a signalée Laure pour trouver un terme pour désigner le type de tâches en jeu vient peut-être d'un manque? A voir et à recevoir vos remarques à ce propos*]

Laure nous a présenté deux spécimens (le patchwork et la formation de groupes d'hommes et de femmes) d'un nouveau type de tâches : T4 = Diviser simultanément deux(ou plusieurs) collections, deux (ou plusieurs) grandeurs de même nature par un même nombre le plus grand possible, le problème étant alors de trouver ce nombre.

Avec le patchwork, situation 1 de Laure, comme avec le pavage d'un parallélépipède rectangle, situation 3, la grandeur concernée est la *longueur*, la situation 2, met en scène deux *collections entières*, une variante des problèmes de confections de sacs de bonbons.

Un coup d'œil dans un manuel de TS spécialité, le "Terracher", et je n'y trouve pas d'autres types de situations. Dans le manuel de 3e de la collection "Diabolo "[[3]](#footnote-3), un problème de remplissage de récipients fait intervenir des *volumes.*

Une remarque: suivant une remarque de Françoise en fin de séance, on pourrait se demander si effectivement on ne pourrait pas connecter ce type de tâches aux problèmes de division abordés dans le primaire. Le fait qu'il y ait plusieurs collections ou grandeurs de même espèce ne doit pas cacher qu'il faut reconnaître, avant toute chose, des situations de partages et donc de divisions.

Une suggestion d'Annie: un problème dans un vieux manuel avec des *prix.*

(Exercice tiré de l'ouvrage de M. Dauzat, Éléments de méthodologie mathématique à l'usage de tous ceux qui s'occupent de mathématiques élémentaires, Librairie Nony & Cie, Paris, 1901)

Un marchand ayant 4 200 litres de cognac à 3,60 F le litre, 1 944 litres d'une deuxième qualité à 2,80 F et3024 litres d'une troisième qualité à 2,40 le litre voudrait vendre la totalité de ces trois qualités en fûts d'égale valeur, mais aussi grand que possible. Quelle devra être la valeur (en F) des fûts, ainsi que la capacité de chacun d'eux et leur nombre de chaque espèce.

1. **Conclusion toute provisoire.**

T2, T3 pour motiver l'étude de TI, la recherche du PGCD de deux ou plusieurs nombres ne constituent pas un habitat très riche pour faire vivre T1. Les raisons d'être du PGCD sont telles qu'on peut comprendre alors que T1 apparaisse, disparaisse sporadiquement dans les programmes.

 Cependant, aujourd'hui et cela justifie peut-être son introduction dans les programmes de troisième il est associé au développement de l'algorithmique, la recherche du PGCD fournissant deux exemples d'algorithmes simples, celui des soustractions successives et surtout l'algorithme d'Euclide, algorithmes que les élèves peuvent faire fonctionner avec papier et crayon ou encore avec Excel.

En TS spécialité, nous avons encore un autre cas de figure puisque le PGCD apparaît dans un contexte d'étude théorique de la divisibilité dans N (ou Z) et qu'il y apparaît- ce qui en justifie l'existence- comme un élément de la théorie.

# 2° Analyse a priori d'un exercice.

L'analyse a priori consiste, un problème étant donné, à imaginer des solutions possibles en se situant au niveau des élèves ou des solutions plus exotiques. Le but est d'imaginer d'autres solutions que celle qui est officiellement attendue. Elle vise aussi bien sûr à essayer de prévoir ce que peuvent faire les élèves.

Un exercice (N°60p 21 manuel de la collection Prisme édité par Belin)

 *Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.*

*Déterminer la longueur du côté d'un carreau sachant que le mur mesure 210cm de hauteur et 135cm de largeur.*

## Solution n°1

Avec un papier quadrillé.

Ce que j'ai sous la main; un papier quadrillé avec des mailles de 0,5cm.

Je trace un rectangle à l'échelle 1/10, de 13,5cm sur 21cm et je fais des essais avec un crayon.

0,5 cm ce qui correspond à 5cm marche de façon triviale, le papier quadrillé le donne à voir.

Je peux ensuite chercher plus grand: je regroupe les carreaux du papier par 2, par 3 etc… et je regarde d'abord sur la largeur si cela convient en faisant des marques au crayon. 2 ne convient pas mais 3 oui, ce qui correspond à 15cm. Toujours avec un crayon, je regarde si je peux "border la hauteur; en ce cas c'est oui. Et je continue ave 4, 5 carreaux …le procédé n'aboutit pas. Je trouve comme réponse 15cm par chance car la bonne réponse est un multiple de 5.(La dimension des carreaux du papier conduit à n'examiner que des dimensions multiples de 0,5 ce qui à l'échelle correspond à des multiples de 5cm).

## Solution n°2

Comme il me faut trouver un entier le plus grand possible, je peux penser à 135. Le côté du carreau ne peut-être plus grand! Mais 2x135cm=270cm>210cm. Cela ne convient pas.

Avec 135 cm, j'avais un seul carreau pour la largeur. Avec 2 carreaux, on aurait 135/2 qui n'est pas entier, cela ne va pas. On peut penser diviser en trois: 135cm:3🡪45cm, mais 210 n'est pas dans la table de 45 (45, 90, 180 et 225...)Cela ne convient pas.

Divisons en 5, 5 est un diviseur évident de 135 : 135cm/5🡪27cm et 210 n'est pas un multiple de 27 car La division de 210 par 27 ne donne pas un résultat entier (210/27=calc7,777777778)

Il convient donc d'avoir un nombre entier qui divise 135 et tel que le résultat de la division obtenu divise à son tour 210.

On peut faire un tableau à partir des diviseurs entiers de 135.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Diviseurs de 135 =n | 135/n=p | 210/p |
| 3 | 45 | Pas entier |
| 5 | 27 | Pas entier |
| 9 | 15 | 14 |
| 15 | 9 | Pas entier |
| 27 | 5 | 42 |
| 45 | 3 | 70 |

Le côté du carreau devant être le plus grand possible, cela correspond au cas où l'on divise le moins 135cm soit le cas n=9 ce qui donne un carreau de côté 15cm. La hauteur est bordée par 14 carreaux.

Note: j'ai volontairement laissé de côté les diviseurs triviaux 1 et 135. Ici, cet oubli n'altère pas la solution. La difficulté de cette technique est de faire la liste des diviseurs de 135.

Elle ne fait pas apparaître explicitement l'idée de PGCD de 135 et 210.

Commentaire: la méthode consiste à chercher la dimension du côté d'un carreau bordant la largeur, puis à regarder si cette dimension convient pour border la hauteur. Elle ne conduit pas à la recherche des diviseurs communs.

## Solution n°3

Au lieu de partir du plus grand entier, je peux commencer par un côté de 1cm qui convient pour paver et chercher des carreaux plus grands. 2cm ne convient pas car il ne divise par 135cm. 3cm convient car il divise à la fois 135 cm et 210 cm. 4cm non. 5cm oui, 6 non…

Il faut trouver un entier qui divise à la fois 135 et 210 et qui soit le plus grand possible!!

On peut dresser la liste des diviseurs de 135 et rechercher parmi ceux-là ceux qui divisent 210.

|  |  |
| --- | --- |
| Diviseurs de 135 =n | 210/n |
| 3 | 70 |
| 5 | 42 |
| 9 | non |
| 15 | 14 |
| 27 | non |
| 45 | non |

 15 est le plus grand diviseur de 135 divisant aussi 210.

Commentaire: On se donne un entier a priori et on regarde s'il divise à la fois la hauteur et la largeur. On recherche bien des diviseurs communs.

## Solution 4 (géométrique)

Elle consiste à calculer l'aire (210cmx135cm=28350cm2) et à chercher les nombres entiers dont le carré divise 28350. Cette recherche peut être fastidieuse si elle est faite pas à pas en examinant tous les entiers dont le carré est inférieur à 28350!. Elle donne comme résultat, 1, 3,5, 9, 15 et 45.
L'élève peut répondre 45, réponse erronée ou il peut poursuivre et parmi les entiers trouvés regarder ceux qui conviennent (tous sauf 45)

## Solution 5 (géométrique très improbable)



Elle consiste à mettre en œuvre l'algorithme d'Euclide mené de façon géométrique.

Les carreaux doivent border la largeur de 135cm; Ils doivent donc paver le carré de côte 135cm et en conséquence également le rectangle restant qui a pour dimension 135cm sur 75cm. Ils doivent paver le carré (EBHG) de côté 75cm , puis le rectangle restant HGFC de dimension 75cm sur 60cm. On réitère et on arrive à un rectangle de côtés 60cm sur 15cm. Ce dernier peut être paver avec un carreau de côté 15cm. On vérifie que tous les rectangles et carrés trouvés auparavant peuvent aussi l'être.

## Solution 6 (avec une fraction irréductible pour des élèves idéalisés)

Appelons ***c*** la longueur du côté d'un carreau solution du problème, ***k*** le nombre de carreaux bordant la largeur du rectangle et ***k****'* le nombre de carreaux bordant la longueur.

Nécessairement on doit avoir $\left\{\begin{matrix}ck=135\\ck'=210\end{matrix}\right.$

[Notons qu'on pourrait qualifier la démarche "d'algébrique" ou "d'analytique" dès lors que l'on part de l'inconnu pour aller vers le connu]

Comme on veut ***c*** le plus grand possible, alors ***k*** et ***k'*** doivent être les plus petits possibles.

$$\left\{\begin{matrix}ck=135\\ck^{'}=210\end{matrix}\right.⇒\frac{k}{k'}=\frac{135}{210}$$

***k*** et ***k'*** seront les plus petits possibles si et seulement si la fraction $\frac{k}{k'}$ est irréductible!

Le problème initial peut alors se ramener à réduire la fraction $\frac{135}{210}$ , ce que font certaines calculatrices, ce qui donne ***k*** = 9 et ***k'*** = 14. On en déduit ***c*** avec $c=\frac{135}{9}=15$. On vérifie qu'on a bien aussi ***ck'=210***

## Conclusion

Il conviendrait ensuite de faire une analyse a posteriori, ceci en examinant le travail des élèves. Laure vient de m'envoyer quelques copies d'élèves qui toutes donnent certes le résultat mais sont très laconiques sur la démarche qui les a conduit à ce résultat.
Exemple: *135 et 210 sont divisibles par 5, 3, 15 et pour finir 1, ce qui veut donc dire que ce sont les seuls nombres entiers que l'on peut diviser. Pour avoir la dimension du côté le plus grand il faut un carré de 15cm de côté*

A ce propos, je me demande quel pourrait -être le rôle du langage (-vocabulaire et patrons de phrases spécifiques au domaine étudié) dans la démarche d'investigation *A en reparler*

De plus, pour rendre compte du travail des élèves, je crois qu'il serait important de garder des traces de leurs recherches (traces écrites et/ou orales).

Ce sera tout pour l'instant!!

1. Dans les programmes d’accompagnement du cycle 3 du primaire, 3 chiffres par 2 chiffres est une indication pour le produit de deux nombres à faire en calcul posé et pour la division le dividende a au plus 4 chiffres et le diviseur 2, toujours pour le calcul posé. [↑](#footnote-ref-1)
2. J'emprunte le terme de "problèmes de partage équitable" au manuel de 3e de la collection Prisme édité par Belin. Il semble que ce terme soit utilisé dans les classes primaires mais pour le partage d'une seule grandeur. En allant sur Wikipédia on trouve une rubrique "partages équitables" mais qui ouvre sur des problèmes économiques qui n'ont pas grand-chose à voir avec le PGCD (voir <http://fr.wikipedia.org/wiki/Partage_%C3%A9quitable>) [↑](#footnote-ref-2)
3. Page 109 Exercice 66. A noter que comme dans beaucoup d'exercices de ce type les auteurs demandent aux élèves en premier lieu de calculer le PGCD qui ensuite leur sera utile pour résoudre le problème posé. Le fait de penser au PGCD n'est donc pas à leur charge. [↑](#footnote-ref-3)