Agrégation interne,

préparation au concours, I.U.F.M. d'Auvergne

problème pour le 9 novembre 2011

Première partie : un exercie très classique : "racines" des endomorphismes symétriques positifs

Une propriété importante des endomorphismes symétriques dans un espace vectoriel euclidien est d'être diagonalisables, avec la possibilité de trouver une base orthogonale devecteurs propres.

1. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u de E est **positif** quand, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a $(u\vec{x}).\vec{x} \geq 0$.

a) Démontrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes symétriques positifs tels que $v^2 = u$, alors u et v ont les mêmes sous-espaces propres.

c) Démontrer que si u est un endormorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif v tel que $v^2 = u$. On le notera $u^{\frac{1}{2}}$.

2. Donner un exemple simple d'endomorphisme positif non symétrique.

3. Soit f un endomorphisme de E.

a) Vérifier que f^*f est symétrique et positif. Démontrer que $Ker(f) = Ker(f^*f)$ et $Im(f^*) = Im(f^*f)$. On posera par la suite $|f| = (f^*f)^{\frac{1}{2}}$.

b) Déterminer $|kf|$, où k est un réel.

4. Exemple : déterminer $|f|$ pour f défini par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie : un petit problème plus original.

On dit qu'un endomorphisme U de $E = \mathbb{R}^n$ est **partiellement isométrique** quand, pour tout vecteur $\vec{x}$ de $(KerU)^{\perp}$, on a $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

1. Soit U un endomorphisme partiellement isométrique de E.

a) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $(KerU)^{\perp}$, on a $(U\vec{x}).(U\vec{y}) = \vec{x}.\vec{y}$[1].

b) Comparer U^*U et le projecteur orthogonal sur le sous-espace $(KerU)^{\perp}$[2].

c) Montrer U^* est partiellement isométrique et déterminer UU^*[3] .

2. Soit U un endomorphisme de E ; montrer que si U^*U est un projecteur, alors U est partiellement isométrique[4]

3. Le produit de deux endomorphismes partiellement isométriques est-il toujours partiellement isométrique ?

4. Soit f un endomorphisme de E.

a) On veut construire un endomorphisme partiellement isométrique U vérifiant $|f| = Uf$ et $(KerU)^{\perp} = Im(f)$.

1. *On se rappelle que si la norme est définie à partir du produit scalaire simplement, le produit scaliare peut être défini à partir de la norme.*
2. On peut utiliser la caractérisation suivante de la projection orthogonale p sur H :
   • $p(\vec{x}) \in H$ • $p(\vec{x}) - \vec{x} \in H^{\perp}$.
3. *On peut démontrer et utiliser l'égalité $Ker(U^*) = (Im(U))^{\perp}$*
4. On utilise la question 3) de la partie précédente et l'agalité $(Ker(U))^{\perp} = Im(U^*)$.

Supposons donc d'abord que U soit une solution au problème. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E notée $\{\vec{e_i}; 1 \leq i \leq n\}$ telle que les $\vec{e_i}$ soient des vecteurs propres de f^*f de valeur propre associée λ_i et $\{\vec{e_i}; r+1 \leq i \leq n\}$ soit une base de $Ker(f)$. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E notée $\{\vec{e'_i}; 1 \leq i \leq n\}$ telle que pour $1 \leq i \leq r$, on ait $\vec{e'_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(\vec{e_i})$ [5] . Déterminer U sur cette base. [6]

Réciproquement, démontrer qu'un endomorphisme ainsi défini est une solution du problème.

b) Déterminer U^*Uf. [7]

5. Déterminer U dans le cas de l'exemple de la question 4 de la partie précédente.

Le but est de construire sur l'ensemble des endomorphismes de $E = \mathbb{R}^n$ (espace vectoriel usuel muni de son produit scalaire usuel) une norme N telle que si A est symétrique positif, on a $N(A)$ est la trace de A notée $Tr(A)$.

6. Soit T un endomorphisme tel que pour tout endomorphisme orthogonal V, on ait $Tr(VT) \leq Tr(T)$.

a) Montrer que T est symétrique. [8]

b) Montrer que T est positif. [9]

7. Soit A un endomorphisme de E. On note G l'ensemble des endomorphismes partiellement isométriques V tels que $V^*VA = A$. Montrer que la fonction de variable V définie sur G par $Tr(VA)$ est bornée. Montrer qu'elle atteint son maximum en au moins un élémentV_0 et que $V_0A = |A|$. [10]

8. A est un endomorphisme symétrique positif et U et V sont des endomorphismes partiellement isométriques.

a) Vérifier que $Tr(V^*AV) \leq Tr(A)$.

b) Vérifier que $Tr(UVA) = \sum_i \left(A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\right) . \left(A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\right)$, où $(\vec{e_i})$ constituent une base orthonormée de E.

c) Vérifier que $Tr(UVA) \leq \left(\sum_i \|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

d) En déduire que$Tr(UVA) \leq Tr(A)$.

9. Construire sur l'ensemble des endomorphismes de E une norme N d'espace vectoriel telle que si A est symétrique positif, on a $N(A) = Tr(A)$. [11]

---

5. *Il s'agit simplement de démontrer que* $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(\vec{e_i}); 1 \leq i \leq r\}$ *est une base orthonormée de* $Im(f^*f) = Im(f^*)$ *ce qui est facile.*

6. On trouve que $U(\vec{e'_i}) = \vec{e_i}$ pour $i \leq r$ et si $i > r$, alors $U(\vec{e'_i}) = \vec{0}$.

7. *On trouve* f.

8. En dimension 2, on peut essayer en prenant pour V les rotations. Attention : avec les symétries, ça marche moins bien, mais je ne sais pas pourquoi !

9. *On se place sur une base de vecteurs propres de* T *et on utilise pour* V *les symétries par rapport à chaque hyperplan orthogonal à chacun des vecteurs de la base pour conclure que toutes les valeurs propres de* T *sont positives.*

10. Il faut bien sûr introduire des fonctions continues

11. $N(|f|)$ *convient.*