Agrégation interne,

préparation au concours, I.U.F.M. d'Auvergne

Première partie : un exercie très classique : "racines" des endomorphismes symétriques positifs

Une propriété importante des endomorphismes symétriques dans un espace vectoriel euclidien est d'être diagonalisables, avec la possibilité de trouver une base orthogonale devecteurs propres.

On utilisera également l'égalité $Ker(U^*) = (Im(U))^\perp$ et plusieurs fois l'égalité $Tr(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{e_i}.f(\vec{e_i})$ où $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée.

1. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u de E est **positif** quand, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a $(u\vec{x}).\vec{x} \geq 0$.

a) Démontrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

> $\star$ Soit λ une valeur propre de u associée au vecteur propre $\vec{x}$. Alors $0 \leq (u\vec{x}).\vec{x} = \lambda \|\vec{x}\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.
> $\star$ Réciproquement, soit $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une base orthogonale de vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres λ_i.
> Si $\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \vec{e_i}$ alors $(u\vec{x}).\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \lambda_i \geq 0$

b) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes symétriques positifs tels que $v^2 = u$, alors u et v ont les mêmes sous-espaces propres.

> Soit $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une base orthogonale de vecteurs propres de v associés respectivement aux valeurs propres λ_i.
> Si $\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \vec{e_i}$ alors $u(\vec{x}) = v^2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 x_i \vec{e_i}$.
> $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ est aussi une base orthogonale de vecteurs propres de u. [a]
>
> *a.* Dans cette modalité de rédaction, on suppose acquis le fait que si $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une base de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_i, alors les valeurs propres de f sont les λ_i et l'espace propre associé à l'une d'elles est engendré par les vecteurs de la base qui lui sont associés.

c) Démontrer que si u est un endormorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif v tel que $v^2 = u$. On le notera $u^{\frac{1}{2}}$.

> Soit $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une base orthogonale de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres (positives [a]) λ_i.
> $\star$ Si v est une solution, alors $\vec{e_i}$ est un vecteur propre de v [b] de valeur propre μ_i et $\lambda_i \vec{e_i} = u(\vec{e_i}) = v^2(\vec{e_i}) = \mu_i^2 \vec{e_i}$ donc v est l'endomorphisme défini par $v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{\lambda_i} x_i \vec{e_i}$: il existe au plus une solution.
> $\star$ L'endomorphisme ainsi défini est bien symétrique (car diagonalisable sur une b.o.n.) et pour tous le vecteurs de la base, on a $v^2(\vec{e_i}) = (\sqrt{\lambda_i})^2 \vec{e_i} = \lambda_i \vec{e_i} = u(\vec{e_i})$ donc $v^2 = u$. [c]
>
> *a.* d'après a)
> *b.* d'après b)
> *c.* Bref sur la base $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq n}$, $u^{\frac{1}{2}}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

2. Donner un exemple simple d'endomorphisme positif non symétrique.

L'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. [a]

[a] C'est bien joli, mais la question est plutôt de savoir comment trouver un contrexemple : il y a ici deux méthodes :
⋆ parier sur l'existence d'un tel exemple en dimension deux et utiliser des coefficients indéterminés;
⋆ la deuxième est plus conceptuelle : A est un endomorphisme symétrique positif ssi $\vec{x}.A\vec{y}$ définit une F.B.S. associée à une forme quadratique positive (par définition); et par ailleurs, si B est une matrice quelconque, $A = \frac{1}{2}(B + B^*)$ définie la même forme quadratique (la même F.B.S.) que B et est en plus symétrique; on obtient donc un exemple en prenant une matrice symétrique positive A, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!!, et en considérant $B = A + C$ où C est une matrice antisymétrique non nulle, par exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & +\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. On pourrait être tenté d'en déduire une conjecture sur la forme de tous les exemples demandés, puis de démontrer cette conjecture, ...

3. Soit f un endomorphisme de E.

a) Vérifier que f^*f est symétrique et positif . Démontrer que $Ker(f) = Ker(f^*f)$ et $Im(f^*) = Im(f^*f)$. On posera par la suite $|f| = (f^*f)^{\frac{1}{2}}$.

⋆ $(f^*f)^* = f^*(f^*)^* = f^*f$
⋆ $f^*f(\vec{x}).\vec{x} = f(\vec{x}).f(\vec{x}) \geq 0$.
⋆ Evidement $Ker(f) \subseteq Ker(f^*f)$. Supposons maintenant $f^*f(\vec{x}) = \vec{0}$; alors $f^*f(\vec{x}).\vec{x} = 0$ et comme $f^*f(\vec{x}).\vec{x} = f(\vec{x}).f(\vec{x})$, on a $\vec{x} \in Ker(f)$ donc l'égalité $Ker(f) = Ker(f^*f)$
⋆ Evidement $Im(f^*f) \subseteq Im(f^*)$; on démontre ensuit l'égalité par les dimensions : [a]
$dimIm(f^*) = dimIm(f) = dim(E) - dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Ker(f^*f)) = dim(E) - dim(Im(f^*f))$ [b]

[a] La méthode constructive commençant par "supposons maintenant $\vec{y} = f^*(\vec{x})$" et finissant par "donc il existe $\vec{z}$ tel que $\vec{x} = f(\vec{z})$" en ayant CONSTRUIT une solution n'est pas claire : le théorème de la dimension et ses avatars prouve de telles existence sans construction.
[b] $dimIm(f^*) = dimIm(f)$ est une version de "une matrice et sa transposée ont même rang"

On posera par la suite $|f| = (f^*f)^{\frac{1}{2}}$.

$|f|$ est caractérisé par : $g = |f|$ ssi g est symétrique positif et $g^2 = f^*f$.

b) Déterminer $|kf|$, où k est un réel.

Ce serait ballot que ce ne soit pas $|k||f|$ (produit d'un endomorphiqme par un réel) :
⋆ $|k||f|$ est symétrique (de matrice $|k|M_{|f|}$ produit d'une matrice symétrique par un réel)
⋆ $|k||f|$ est positif (produit d'un endomorphiqme poisitif par un réel positif : immédiat par $(\lambda u(\vec{x})).\vec{x} = \lambda(u(\vec{x}).\vec{x})$)
⋆ $(|k||f|) \circ (|k||f|) = k^2(|f| \circ |f|) = k^2(f^* \circ f) = (kf)^* \circ (kf)$

4. Exemple : déterminer $|f|$ pour f défini par la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$M^*M = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} |\beta| & 0 & 0 \\ 0 & |\alpha| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement la solution.

Deuxième partie : un petit problème plus original.

On dit qu'un endomorphisme U de $E = \mathbb{R}^n$ est **partiellement isométrique** quand, pour tout vecteur $\vec{x}$ de $(KerU)^{\perp}$, on a $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

1. Soit U un endomorphisme partiellement isométrique de E.

a) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $(KerU)^{\perp}$, on a$(U\vec{x}).(U\vec{y}) = \vec{x}.\vec{y}$. [1]

[1] **Indication :** *on se rappelle que si la norme est définie à partir du produit scalaire simplement, le produit scaliare peut être défini à partir de la norme.*

Immédiat par $\vec{x}.\vec{y} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$ ou $\vec{x}.\vec{y} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\right)$.

b) Comparer U^*U et le projecteur orthogonal sur le sous-espace $(KerU)^\perp$. [2]

$\star$ $U^*U(\vec{x}) \in (KerU)^\perp$ provient de $U^*U(\vec{x}).\vec{y} = U(\vec{x}).U(\vec{y}) + 0$ dès que $\vec{y} \in Ker(U)$
$\star$ $U^*U(\vec{x}) - \vec{x} \in ((KerU)^\perp)^\perp = Ker(U)$ provient de $\vec{y} \in (KerU)^\perp$ implique $(U^*U(\vec{x}) - \vec{x}).\vec{y} = (U\vec{x}).(U\vec{y}) - \vec{x}.\vec{y} = 0$ et on a $((KerU)^\perp)^\perp = Ker(U)$

c) Montrer U^* est partiellement isométrique et déterminer UU^*. [3]

$\star$ Soit $\vec{x} \in (ker(U^*))^\perp = Im(U)$ donc y tel que $\vec{x} = U(\vec{y})$. Alors
$U^*(\vec{x}).U^*(\vec{x}) = U^*U(\vec{y}).U^*U(\vec{y}) = \vec{y}.U^*UU^*U(\vec{y}) = \vec{y}.U^*U(\vec{y}) = U(\vec{y}).U(\vec{y}) = \vec{x}.\vec{x}$.

2. Soit U un endomorphisme de E ; montrer que si U^*U est un projecteur, alors U est partiellement isométrique. [4]

$\star$ Un projecteur symétrique est une projection orthogonale sur son image, ici $Im(U^*U) = Im(U^*)$. Donc si $\vec{x} \in (Ker(U))^\perp = Im(U^*)$ on a
$U(\vec{x}).U(\vec{x}) = UU^*(\vec{y}).UU^*(\vec{y}) = \vec{y}.UU^*UU^*(\vec{y}) = \vec{y}.UU^*(\vec{y}) = U^*(\vec{y}).U^*(\vec{y}) = \vec{x}.\vec{x}$
(c'est le même calcul que dans la réponse à la question au dessus).

3. Le produit de deux endomorphismes partiellement isométriques est-il toujours partiellement isométrique ?

$\star$ Un projecteur orthogonal est partiellement isométrique. Dans le plan rapporté à une b.o.n. $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, le composé du projecteur orthogonal p_1 sur $\mathbb{R}\vec{e_1}$ avec le projecteur orthogonal p_2 sur $\mathbb{R}(\vec{e_1}+\vec{e_2})$ dans l'ordre $p_2 \circ p_1$ a pour noyau $\mathbb{R}\vec{e_2}$ dont l'orthogonal est $\mathbb{R}\vec{e_1}$ et clairement on n'a pas conservation des normes des vecteurs de cet espace.

4. Soit f un endomorphisme de E.

a) On veut construire un endomorphisme partiellement isométrique U vérifiant $|f| = Uf$ et $(KerU)^\perp = Im(f)$.

Supposons donc d'abord que U soit une solution au problème.

On a donc $Uf \circ Uf = f^*f$ et $(KerU)^\perp = Im(f)$.

Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E notée $\{\vec{e_i}; 1 \leq i \leq n\}$ telle que les $\vec{e_i}$ soient des vecteurs propres de f^*f de valeur propre associée λ_i et $\{\vec{e_i}; r+1 \leq i \leq n\}$ soit une base de $Ker(f)$.

f^*f est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée $\{\vec{e_i}; 1 \leq i \leq n\}$. On peut supposer que $(\vec{e_i})_{r+1 \leq i \leq n}$ est une base de $Ker(f) = Ker(f^*)$. Les autres $\{\vec{e_i}; 1 \leq i \leq r\}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_i > 0$. En particulier, $(\vec{e_i})_{1 \leq i \leq r}$est une base de $Im(f^*f)$.

Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E notée $\{\vec{e_i'}; 1 \leq i \leq n\}$ telle que pour $1 \leq i \leq r$, on ait $\vec{e_i'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(\vec{e_i})$.

Il s'agit simplement de démontrer que $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(\vec{e_i}); 1 \leq i \leq r\}$ est une base orthonormée de $Im(f)$: on pourra ensuite la compléter pen une b.o.n. de E :
$\star$ elle est orthogonale car $f(\vec{e_i}).f(\vec{e_j}) = f^*f(\vec{e_i}).\vec{e_j} = 0$ quand $i \neq j$ [a]
$\star$ elle est normée car $f(\vec{e_i}).f(\vec{e_i}) = f^*f(\vec{e_i}).\vec{e_i} = \lambda_i \vec{e_i}$ [b]
$\star$ $dim(Im(f) = dim(Im(f^*) = dim(Im(f^*f) = r$ [c]

a. d'après la question précédente
b. d'après la question précédente
c. d'après la remarque finale de la réponse précédente

Déterminer U sur cette base.

On veut que $U(\vec{e_i'}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Uf(\vec{e_i}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} |f|(\vec{e_i})$ donc $U(\vec{e_i'}) = \vec{e_i}$ pour $i \leq r$ et si $i > r$, alors $U(\vec{e_i'}) = \vec{0}$.

2. **Indication :** *on peut utiliser la caractérisation suivante de la projection orthogonale p sur H :*
• $p(\vec{x}) \in H$ • $p(\vec{x}) - \vec{x} \in H^\perp$.

3. **Indication :** *on peut démontrer et utiliser l'égalité $Ker(U^*) = (Im(U))^\perp$ ce qui était prévu en cours, mais n'a pas été traité.*

4. **Indication :** *on utilise la question 3) de la partie précédente.*

Réciproquement, démontrer qu'un endomorphisme ainsi défini est une solution du problème.

> On a tout fait pour, il n'y a qu'à recopier :
> $\star$ Uf a une matrice diagonale à coefficients positifs $\sqrt{\lambda_i}$ sur la b.o.n. $\{\vec{e_i'}; 1 \leq i \leq n\}$ donc est $|f|$ et $(KerU)^{\perp} = Im(f)$.

b) Déterminer U^*Uf.

> U^*U est le projecteur sur $(KerU)^{\perp}$ (car U partiellement isométrique par définition de U et d'après la question 1.b) et $(KerU)^{\perp} = Im(f)$ (par définition de U) donc $U^*Uf = f$.

5. Déterminer U dans le cas de l'exemple de la question 4 de la partie précédente.

> U a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{|\beta|}{\beta} & 0 \\ \frac{|\alpha|}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Suite et fin

Le but est de construire sur l'ensemble des endomorphismes de $E = \mathbb{R}^n$ (espace vectoriel usuel muni de son produit scalaire usuel) une norme N telle que si A est symétrique positif, on a $N(A) = Tr(A)$ où $Tr(A)$ est la trace de A.

6. Soit T un endomorphisme tel que pour tout endomorphisme orthogonal V, on ait $Tr(VT) \leq Tr(T)$.

a) Montrer que T est symétrique.

> $\star$ en dimension 2, on peut essayeren prenant pour V des rotations : la trace de $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $(a+d)cos(\theta) + (b-c)sin(\theta)$. On cherche une condition sur (a, b, c, d) pour que$\forall\theta,\ (a+d)cos(\theta) + (b-c)sin(\theta) \leq (a+d)$. Il suffit bien sûr que $b = c$, mais c'est aussi nécessaire : il faut que le demi-plan défini par $(a+d)x + (b-c)y \leq (a+d)$ contienne le cercle unité. [a].
>
> $\star$ en dimension qcq, pour chaque couple (i, j) $(i \neq j)$, l'usage d'applications définies comme rotations sur le plan engendré par $\{\vec{e_i}, \vec{e_j}\}$ et identité sur le supplémentaire orthogonal conduit de la même façon à $a_{i,j} = a_{j,i}$.
>
> a. On peut aussi essayer avec des symétries : la trace de $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $(a-d)cos(\theta) + (b+c)sin(\theta)$. On étudie $\forall\theta,\ (a-d)cos(\theta) + (b+c)sin(\theta) \leq (a+d)$? ? ? **Bizarre, ça marche moins bien**

b) Montrer que T est positif.

> $\star$ On se place sur une base de vecteurs propres de T et on utilise V symétrie par rapport à chaque hyperplan orthogonal à chacun des vecteurs de la base pour conclure que toutes les valeurs propres de T sont positives.

7. Soit A un endomorphisme de E. On note G l'ensemble des endomorphismes partiellement isométriques V tels que $V^*VA = A$. Montrer que la fonction de variable V définie sur G par $Tr(VA)$ est bornée. Montrer qu'elle atteint son maximum en au moins un élément V_0 et que $V_0A = |A|$. [5]

5. **Indication :** il faut bien sûr introduire des fonctions continues

On peut raisonner en terme de matrice si on veut :
⋆ L'application qui à une matrice M associe $Tr(MA)$ est continue (elle est linéaire sur un espace vectriel de dimension fini).
⋆ L'application Φ qui à une matrice M associe $M^*MA - A$ est continue (elle est exprimable par des polynomes de degré 2) est l'application Ψ qui à une matrice M associe $M^*MM^*M - M^*M$ est continue (elle est exprimable par des polynomes de degré 4). G est l'ensemble $\Phi^{-1}(\{O\}) \cap \Phi^{-1}(\{O\})$ et est donc fermé.
⋆ $\|V\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|$ en utilisant la décomposition sur $Ker(V) \oplus (Ker(V))^{\perp}$ donc G est borné.
Donc $Tr(MA)$ est bornée sur G est atteint sa borne.

On prend (comme déjà fait) une base orthonormée de E notée $\{\vec{e_i}; 1 \leq i \leq n\}$ telle que les $\vec{e_i}$ soient des vecteurs propres de A^*A :
$Tr(VA) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{e_i}.(VA\vec{e_i}) \leq \sum_{i=1}^{i=n} \|VA\vec{e_i}\|\|\vec{e_i}\| = \sum_{i=1}^{i=n} \|VA\vec{e_i}\|$
mais$\|VA\vec{e_i}\|^2 = (VA\vec{e_i}).(VA\vec{e_i}) = (V^*VA\vec{e_i}).(A\vec{e_i}) = (A\vec{e_i}).(A\vec{e_i}) = (A^*A\vec{e_i}).\vec{e_i} = \lambda_i$
$Tr(VA) \leq \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{\lambda_i} = Tr(|A|)$

8. A est un endomorphisme symétrique positif et U et V sont des endomorphismes partiellement isométriques [6].

a) Vérifier que $Tr(V^*AV) \leq Tr(A)$.

On se place sur une b.o.n. de vecteurs propres de A :
$Tr(V^*AV) = Tr(V^*VA) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{e_i}.(V^*VA\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \vec{e_i}.(V^*V\vec{e_i})$.
$Tr(V^*AV) \leq \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \|\vec{e_i}\|\|(V^*V\vec{e_i})\|$.
. Or pour un projecteur, $\|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$ donc
$Tr(V^*AV) \leq \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \|\vec{e_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = Tr(A)$

b) Vérifier que $Tr(UVA) = \sum_i \left(A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\right) . \left(A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\right)$, où $(\vec{e_i})$ constituent une base orthonormée de E.

$Tr(UVA) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{e_i}.(UVA\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{i=n} (V^*U^*\vec{e_i}).(A\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{i=n} (A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}).(A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i})$.

c) Vérifier que $Tr(UVA) \leq \left(\sum_i \|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\sum \left(A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\right) . \left(A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\right) \leq \sum \|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|\|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\| \leq \left(\sum \|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

d) En déduire que$Tr(UVA) \leq Tr(A)$.

⋆ $\|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|^2 = A\vec{e_i}.\vec{e_i}$ donc $\sum \|A^{\frac{1}{2}}\vec{e_i}\|^2 = Tr(A)$.
⋆ $\|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\|^2 = \vec{e_i}.UVAV^*U^*\vec{e_i}$ donc $\sum \|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\vec{e_i}\|^2 = Tr(UVAV^*U^*) \leq Tr(VAV^*) \leq Tr()$ d'après les questions précédentes.
⋆ On passe enfin à la racine (ou au carré).

9. Construire sur l'ensemble des endomorphismes de E une norme N d'espace vectoriel telle que si A est symétrique positif, on a $N(A) = Tr(A)$.

$N(f) = Tr(|f|)$ convient :
⋆ $|f|$ est symétrique positif donc sa trace est positive ;
⋆ $N(kf) = Tr(|kf|) = Tr(|k||f|) = |k|Tr(|f|) = |k|N(f)$;
⋆ si $N(f) = 0$, alors $Tr(|f|) = 0$ donc toutes les valeurs propres de $|A|$ sont nulles, et comme ce sont les racines carrées de celles de f^*f, cet endomorphisme est aussi nul, soit $E = Ker(f^*f) = Ker(f)$ don f est nul ;
⋆ $N(f+g) = Tr(|f+g|) = Tr(V_0(f+g)) = Tr(|f+g|) = Tr(V_0 f + V_0 g)$
Ici, c'est le V_0 de $f+g$ et $Tr(V_0 f) \leq Tr(|f|)$ et $Tr(V_0 g) \leq Tr(|g|)$ [a]

[a] c'est seulement là que la question 7 est utile

[6] On va souvent utiliser le fait que si $(\vec{e_i})$ constituent une base orthonormée de E, $Tr(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{e_i}.(M\vec{e_i})$