

Matrice tridiagonales

Indications pour la recherche directe des vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On étudie le système

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \dots + 0x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_3 \dots + 0x_n = \lambda x_2 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 \dots + 0x_n = \lambda x_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \dots \\ 0x_1 + \dots \dots + x_{n-2} + 0x_{n-1} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ 0x_1 + \dots \dots + 0x_{n-2} + x_{n-1} + 0x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

La suite (finie) des coordonnées satisfait donc :

$$\begin{cases} x_i - \lambda x_{k-1} + x_{k-2} = 0 \text{ pour } 3 \leq k \leq n \\ x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ -\lambda x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

On a donc (en ajoutant pour le confort un $x_0 = 0$) les conditions

Cas $|\lambda| > 2$

$$\exists \alpha \exists \beta \begin{cases} x_0 = 0 \\ (\forall k)_{0 \leq k \leq n} \quad x_k = \alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^k + \beta \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^k \\ -\lambda x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Cas $|\lambda| < 2$

$$\exists \alpha \exists \beta \begin{cases} x_0 = 0 \\ (\forall k)_{0 \leq k \leq n} \quad x_k = \alpha \left(\frac{\lambda + i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} \right)^k + \beta \left(\frac{\lambda - i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} \right)^k \\ -\lambda x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Cas $\lambda = 2\epsilon$ (en notant $\epsilon \in \{-1; +1\}$)

$$\exists \alpha \exists \beta \begin{cases} x_0 = 0 \\ (\forall k)_{0 \leq k \leq n} \quad x_k = (\alpha i + \beta)(\epsilon)^k \\ -2\epsilon x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Exemple de discussion dans le cas $|\lambda| < 2$: on pose $\lambda = 2 \cos(\theta)$ pour faire disparaître les racines :

$$\exists \alpha \begin{cases} (\forall i)_{0 \leq i \leq n} \quad x_i = \alpha (e^{2ki\theta\pi} - e^{-2ki\theta\pi}) = 2i\alpha \sin(k\theta) \\ 2 \cos(\theta)x_n = x_{n-1} \quad \text{soit} \quad 2 \cos(\theta) \sin(n\theta) = \sin((n-1)\theta) \end{cases}$$

Ainsi pour les $\lambda = 2 \cos(\theta)$ satisfaisant la condition $2 \cos(\theta) \sin(n\theta) = \sin((n-1)\theta)$ sont des valeurs propres, et la droite (complexe) engendrée par $(\sin(\theta), \sin(2\theta), \dots, \sin(n\theta))$ est une droite propre.