Inversion de transformées

A. Questions préliminaires

1) On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n suivante :

ϕ_f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\phi_f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} i^n e^{itx} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{itx} f(x)$ est continue par morceaux (et même continue)[1] sur $\mathbb{R}$,
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{itx} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
3. pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{itx} f(x)\right| \leq f(x)$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$,

donc P_0 est vérifiée.

Supposons que P_n est vérifiée. Notons $g :\ (x,t) \mapsto i^n e^{itx} x^n f(x)$.

1. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
3. pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leq |x|^{n+1} f(x)$ et $x \longmapsto |x|^{n+1} f(x) f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;

donc $\phi_f^{(n)}$ est de classe C^1, i.e. ϕ_f est de classe C^{n+1}, avec :

$$\phi_f^{(n+1)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} i^{n+1} e^{itx} x^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

donc P_{n+1} est vérifiée.

2) L'**inégalité**[2] des accroissements finis appliquée à la fonction $\varphi :\ x \longmapsto e^{ix}$ à l'ordre $n-1$ donne :

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \left| \phi(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} x^m \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t\in[0,x]} |\varphi^{(n)}(t)| = \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t\in[0,x]} |i^n e^{it}| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

3) L'application $h_{a,b}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et l'inégalité précédente pour $n = 2$ donne $e^{ita} = 1 + ita + O(t^2)$ et $e^{itb} = 1 + itb + O(t^2)$ d'où le résultat.

4) Si $t = 0$, l'inégalité est évidente. Sinon, l'inégalité des accroissements finis appliquée à ϕ entre $-at$ et $-bt$ donne :

$$|it\, h_{a,b}(t)| = |\phi(-at) - \phi(-bt)| \leq |bt - at| \sup_{s\in[-bt,-at]} \{|\phi'(s)|\} = (b-a)|t|$$

d'où l'inégalité demandée.

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, nous avons $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!} \geq \frac{k^k}{k!}$ (la série est à termes positifs).

B. La fonction ϕ_f caractérise f

6) Pour θ non nul, le changement de variable $x = \theta t$ donne $R(\theta, T) = \displaystyle\int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ donc par parité de la fonction définie par $\dfrac{\sin(x)}{x}$, on a $R(\theta, T) = 2S(\theta T)$.
Cette égalité est évidement aussi vraie quand $\theta = 0$.

7) On a $R(x,T) - R(x,T) = 2S(xT) - 2S(yT)$ et $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} S(xT) = \begin{cases} \pi & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (la dernière limite provient de l'imparité de la fonction S).

---

1. par référence au programme, pour ne pas écrire révérence à son égard
2. on ne peut pas appliquer l'égalité des accroissements finis (la fonction ϕ est à valeurs complexes). En revanche l'évaluation du reste par la formule intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)dt$ convient aussi.

On obtient donc le tableau de limites suivant quand T tend vers $+\infty$:

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$y<0$	0	π	2π
$y=0$	$-\pi$	0	π
$y>0$	-2π	$-\pi$	0

8) Posons $\theta : \ (t,x) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\, h_{a,b}(t) e^{itx} f(x)$. Pour $T>0$, nous avons :

1. θ est continue sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$;
2. θ est intégrable sur $[-T,T]\times\mathbb{R}$, car $|\theta(t,x)| \leq \frac{1}{2\pi}\,|h_{a,b}(t)|\, f(x)$ avec $h_{a,b}$ intégrable (car continue) sur $[-T,T]$ et f intégrable sur $\mathbb{R}$;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{f(x)}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{itx} h_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

On applique ensuite le théorème de convergence dominée en choisissant une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers vers $+\infty$:

1. ϕ_n est la suite de fonctions définies par $\phi_n = \dfrac{f(x)}{2\pi}\displaystyle\int_{-T_n}^{T_n} e^{itx}h_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$ vers l'application continue par morceaux :

$$\phi : \ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \frac{1}{2}\,f(a) & \text{si } x=a \\ f(x) & \text{si } a<x<b \\ \frac{1}{2}\,f(b) & \text{si } x=b \\ 0 & \text{si } b<x \end{cases}$$

2. les fonction ϕ_n sont dominées par une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ |\phi_n(x)| = \frac{2||S||_\infty}{\pi}\, f(x)$$

Donc pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T_n}^{T_n} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

9) Si deux fonctions f et g de E ont même transformée $\Phi_f=\Phi_g$, le résultat précédent appliqué à $a=x$ et $b=0$ donne :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut dériver cette égalité par rapport à x donc $f=g$.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10) La fonction f_0 est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x)=0$ car f_0 est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et

$$\forall\, x>0,\ f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\ln x}{2}(\ln x+2)\right)$$

qui tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

f_0 est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Pour $A>0$, le changement de variable $u=\ln x$ donne :

$$\int_{-A}^{A} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln A}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

qui tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.
Donc f_0 est un élément de E.

11) Le même changement de variable donne, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-A}^{A} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left(ku - \frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u$$

qui tend vers $\exp\left(\dfrac{k^2}{2}\right)$ quand A tend vers $+\infty$.
donc f_0 admet des moments de tous ordres ($x \longmapsto x^k f_0(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$) et $a_k(f_0) = \exp\left(\dfrac{k^2}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

12) f_a est clairement continue et positive (car $-1 \leq a \leq 1$) sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la même méthode que précédemment donne :

$$\int_{-A}^{A} x^k\left(f_a - f_0\right)(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} \exp\left((k+2i\pi)u - \frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u\right)$$

qui a pour limite quand A tend vers $+\infty$

$$\mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{(k+2i\pi)^2}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{k^2-2\pi^2}{2}\right)\sin(2k\pi) = 0$$

donc f_a a des moments de tous ordres et $a_k(f_a) = a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $a_0(f_a) = a_0(f_0) = 1$ et $f_a \in E$.

Une application $f \in E$ qui admet des moments de tous ordres n'est donc pas toujours déterminée par la suite de ses moments.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$(b_{2k+1}(f))^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^k \sqrt{f(x)} \times |x|^{k+1}\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^{2k} f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}} x^{2k+2} f(x)\,\mathrm{d}x = a_{2k}(f)\,a_{2k+2}(f)$$

14) Si $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} = \dfrac{a_{2p}(f)^{1/(2p)}}{2p} \leq M \leq 2M$.

Si $k = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$,

$$b_k(f) = b_{2p+1}(f) \leq \sqrt{a_{2p}(f)}\sqrt{a_{2p+2}(f)} \leq (2pM)^p\left((2p+2)M\right)^{p+1} = p^p(p+1)^{p+1}(2M)^{2p+1}$$

La concavité de la fonction logarithme donne :

$$\frac{p}{2p+1}\ln(p) + \frac{p+1}{2p+1}\ln(p+1) \leq \ln\left(\frac{p}{2p+1}p + \frac{p+1}{2p+1}(p+1)\right) = \ln\frac{p^2+(p+1)^2}{2p+1} \leq \ln(2p+1)$$

en remarquant que $p^2 + (p+1)^2 = 2p^2 + 2p + 1 \leq 4p^2 + 4p + 1 = (2p+1)^2$. En composant par la fonction (croissante) exponentielle :

$$p^p(p+1)^{p+1} \leq (2p+1)^{2p+1} = k^k$$

et donc $b_k(f) \leq k^k\,(2M)^k$, soit $\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leq 2M$.

15) L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left|\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \sup_{t\in[x,x+h]} \left|\int_{\mathbb{R}} e^{itu} i^n u^n f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |u|^n f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{|h|^n}{n!} b_n(f)$$

16) D'après 14) et 5)

$$0 \leq \frac{b_n(f)}{n!} \leq \frac{n^n}{n!}\,(2M)^n \leq (2eM)^n$$

Soit alors $x, h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < \dfrac{1}{2eM} = A$. Nous avons :

$$|\frac{b_n(f)}{n!} h^n| \leq \left(\frac{h}{2eM}\right)^n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞. L'inégalité 15) prouve alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!}\,\phi_f^{(n)}(x)$ converge et a pour somme $\phi_f(x)$, ce qui donne :

$$\forall x, h \in \mathbb{R},\ |h| < A \Longrightarrow \phi_f(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_f^{(n)}(x)$$

17) Comme la suite $a_k(g)$ vérifie la propriété $(\mathbf{U})$, avec le même M, nous avons également :

$$\forall x, h \in \mathbb{R},\ |h| < A \Longrightarrow \phi_g(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_g^{(n)}(x)$$

Avec $x = 0$, nous obtenons :

$$\forall h \in]-A, A[,\ \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,i^n\,a_n(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,i^n\,a_n(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_g^{(n)}(0) = \phi_g(h)$$

donc ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $[-A/2, A/2]$.

Soit ℓ un entier > 0 et supposons que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\dfrac{\ell A}{2}, \dfrac{\ell A}{2}\right]$. Les dérivées successives de ϕ_f et ϕ_g coïncident donc également sur $\left[-\dfrac{\ell A}{2}, \dfrac{\ell A}{2}\right]$. En choisissant successivement $x = \dfrac{\ell A}{2}$ et $x = -\dfrac{\ell A}{2}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \forall h \in [0, A/2],\ \phi_f\left(\dfrac{\ell A}{2} + h\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_f^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_g^{(n)}\left(\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(\frac{\ell A}{2} + h\right) \\ \forall h \in [-A/2, 0],\ \phi_f\left(-\dfrac{\ell A}{2} + h\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_f^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\,\phi_g^{(n)}\left(-\frac{\ell A}{2}\right) = \phi_g\left(-\frac{\ell A}{2} + h\right) \end{cases}$$

ce qui prouve que ϕ_f et ϕ_g coïncident sur $\left[-\dfrac{(\ell+1)A}{2}, \dfrac{(\ell+1)A}{2}\right]$ et achève la preuve par récurrence.

18) Supposons que deux éléments f et g de E ont des moments de tous ordres égaux, et que leurs moments vérifient en outre la condition $(\mathbf{U})$. La question 17) prouve que $\phi_f = \phi_g$, soit $f = g$ d'après la question 9. Nous avons donc montré qu'une fonction qui admet des moments de tous ordres vérifiant la condition $(\mathbf{U})$ est entièrement caractérisée par la suite de ses moments.

E. Application

19) **Analyse :** supposons que f est une solution du système. Nous avons alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1}(f) = 0 a_{2k}(f) = (2k-1) \times (2k-3) \times \times 3 \times 1 \times a_0(f) = \frac{(2k)!}{2^k\,k!}$$

On a ensuite :

$$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq a_{2k}(f) = \frac{(2k)(2k-1)(k+1)}{2^k} \leq \frac{(2k)^k}{2^k} = k^k$$

d'où

$$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq \frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$$

La suite $a_k(f)$ vérifie la condition $(\mathbf{U})$ et la question 16) s'applique (avec $x = 0$) :

$$\forall h,\ |h| < \frac{1}{e} \Longrightarrow \phi_f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!}\, i^n a_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!}\, i^{2k} \frac{(2k)!}{2^k\, k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{h^2}{2}\right)^k = \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)$$

Les fonctions ϕ_f et $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ sont développables en séries entières en tout point de $\mathbb{R}$ et coïncident sur un voisinage de 0, elles sont donc égales sur $\mathbb{R}$.

Considérons d'autre part la fonction $g :\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Nous avons :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \phi_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ixu\right)\, \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\, \mathrm{d}u = \exp\left(\frac{(ix)^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \phi_f(x)$$

donc $f = g$ d'après la question 9). La seule solution possible au problème posé est donc la fonction g.

Synthèse : la fonction g est clairement élément de E et admet des moments de tous ordres. Comme g est paire, ses moments d'ordres impairs sont nuls et une intégration par partie donne pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_{2k}(g) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1}\,(-x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2k-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, \mathrm{d}x \\
&= (2k-1)\, a_{2k-2}(g)
\end{aligned}$$

donc g est bien solution du système.

Conclusion : le système possède donc pour unique solution la fonction $g :\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.