IREM de Clermont-Ferrand — 30 Juin 2011
Formation ISN — Alex Esbelin
Codes Correcteurs — Malika More

Codes détecteurs et correcteurs d'erreurs

---

1 Exercices

Exercice 1. Si on expédie des bits sur un canal binaire symétrique à raison de 512 bits toutes les millisecondes, avec un taux d'erreur de 1%, quel est le nombre de bits faux reçus au bout de trois heures ?

Exercice 2. Si on code les mots d'information de k bits en des mots de code de n bits, combien faut-il de bits en tout pour définir l'ensemble des mots de code ?

Exercice 3. On considère le code $\mathcal{C}_{3,1}$ défini par :
- le code de 0 est 001
- le code de 1 est 110

1) Quelle est la distance minimale de ce code ?

2) On suppose, comme dans le cours, que la probabilité qu'un bit soit erroné est $p << 0,5$. Déterminer le vecteur d'erreur le plus probable pour chacun des huit messages reçus possibles.

Exercice 4. On considère le code $\mathcal{C}_{5,3}$ suivant :

info			mots de code												
0	0	0	0	0	0	1	0	•							
0	0	1	0	0	1	0	1	3	•						
0	1	0	0	1	0	1	1	2	3	•					
0	1	1	0	1	1	1	0				•				
1	0	0	1	0	0	0	0					•			
1	0	1	1	0	1	1	1						•		
1	1	0	1	1	0	1	0							•	
1	1	1	1	1	1	0	1								•

1) Indiquer sur la partie droite (sous les points noirs) les distances entre les mots de code pris deux à deux ($\frac{8\times 7}{2} = 28$ nombres à trouver, trois sont déjà indiqués).

2) En déduire la distance minimale de ce code.

Exercice 5. Faire la liste de tous les codes systématiques (c'est-à-dire des codes dans lequel les bits de contrôle ne sont pas entrelacés avec les bits d'info - on supposera ici que les bits de contrôle sont *après* les bits d'infos) possibles de la forme $\mathcal{C}_{3,2}$.

Exercice 6. Les valeurs de n et de m étant fixées, combien y-a-t-il de codes $\mathcal{C}_{n,m}$ systématiques différents ?

Exercice 7. À partir d'un code $\mathcal{C}_{n,m,d}$, on définit un nouveau code de longueur $n+1$ en ajoutant le bit 1 à la fin des anciens mots de code. Quelle est la distance minimale de ce nouveau code ? Même question si on rajoute deux fois le bit 1. Généraliser. Justifiez vos réponses.

Exercice 8. À partir d'un code $\mathcal{C}_{n,m,d}$, on définit un nouveau code de longueur $2n$ en répétant deux fois les anciens mots de code. Quelle est la distance minimale de ce nouveau code ? Même question si on renverse l'ordre des bits du bloc avant de les utiliser comme bits de contrôle. Justifiez vos réponses.

Exercice 9. On fabrique un code $\mathcal{C}_{2m,m}$ en collant à la fin de chaque mot d'information son complément. Quelle est la distance minimale de ce code ? Justifiez votre réponse.

2 Corrigés des exercices

Exercice 1.

512 bits/mS $\rightarrow$ *512000 bps* $\rightarrow$*(1%)*$\rightarrow$ *5120 bps* $\rightarrow$ *18442000 bph* $\rightarrow$ *55296000* bits faux en 3 heures

Exercice 2.

k bits $\rightarrow 2^k$ *mots d'info* $\rightarrow 2^k$ *mots de codes de n bits chacun* $\rightarrow n \times 2^k$ *bits*

Exercice 3.

1) Il n'y a que deux mots de codes, et leur distance est 3. Donc la distance minimale est 3.

2) Pour tout message (de 3 bits) μ possible, le mot de code le plus proche est soit 110, soit 001. Le vecteur d'erreur est donc soit $\mu \oplus 110$, soit $\mu \oplus 001$. Et le plus probable est celui de poids le plus faible.

Ce qui donne :

mot reçu	000	001	010	011	100	101	110	111
vecteur d'erreur	001	000	100	010	010	100	000	001

Exercice 4.

1)

info	*mots de code*								
0 0 0	0 0 0 1 0	•							
0 0 1	0 0 1 0 1	3	•						
0 1 0	0 1 0 1 1	2	3	•					
0 1 1	0 1 1 1 0	2	3	2	•				
1 0 0	1 0 0 0 0	2	3	4	4	•			
1 0 1	1 0 1 1 1	3	2	3	3	3	•		
1 1 0	1 1 0 1 0	2	5	2	2	2	3	•	
1 1 1	1 1 1 0 1	5	2	3	3	3	2	3	•

2) distance minimale du code : 2

Exercice 5.

$\mathcal{C}_{3,2} \rightarrow 2^2$ *mots de codes de 3 bits chacun (2 bits d'info + 1 bit de contrôle)* $\rightarrow$ *pour chaque mot de code, 2 possibilités pour le bit de contrôle* $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ *possibilités au total.*

Il s'agit des codes suivants :

info	*code* 1	*code* 2	*code* 3	*code* 4	*code* 5	*code* 6	*code* 7	*code* 8
00	000	001	000	001	000	001	000	001
01	010	010	011	011	010	010	011	011
10	100	100	100	100	101	101	101	101
11	110	110	110	110	110	110	110	110

info	*code* 9	*code* 10	*code* 11	*code* 12	*code* 13	*code* 14	*code* 15	*code* 16
00	000	001	000	001	000	001	000	001
01	010	010	011	011	010	010	011	011
10	100	100	100	100	101	101	101	101
11	111	111	111	111	111	111	111	111

Exercice 6.

$\mathcal{C}_{n,m} \rightarrow 2^m$ *mots de codes de $n - m$ bits de contrôle* $\rightarrow (n-m) \times 2^m$ *bits* $\rightarrow$ *2 possibilités pour chaque bit* $\rightarrow 2^{(n-m)\times 2^m}$

Exercice 7.

$\mathcal{C}_{n,m,d} \rightarrow$ *la distance entre deux mots de codes est supérieure ou égale à d.*

Si on rajoute un ou plusieurs bits 1 à chaque mot de code, cette distance ne change pas ! Donc la distance minimale d non plus.

Exercice 8.

Si on double chaque mot, chaque distance est doublée. Il en est donc de même de la distance minimale.

Même chose si on renverse l'ordre des bits.

Exercice 9.

Si on change un seul bit d'info, alors on change deux bits. D'où $d = 2$.