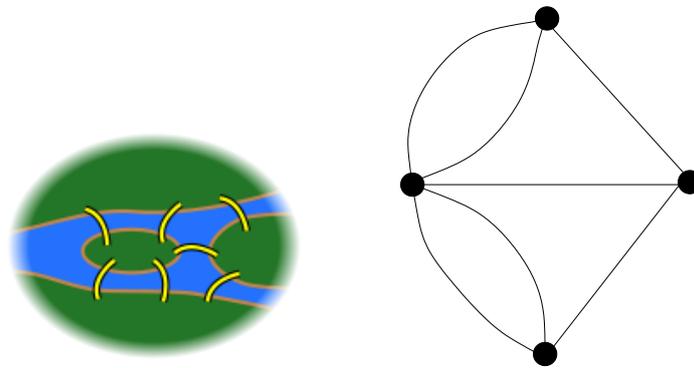

Graphes

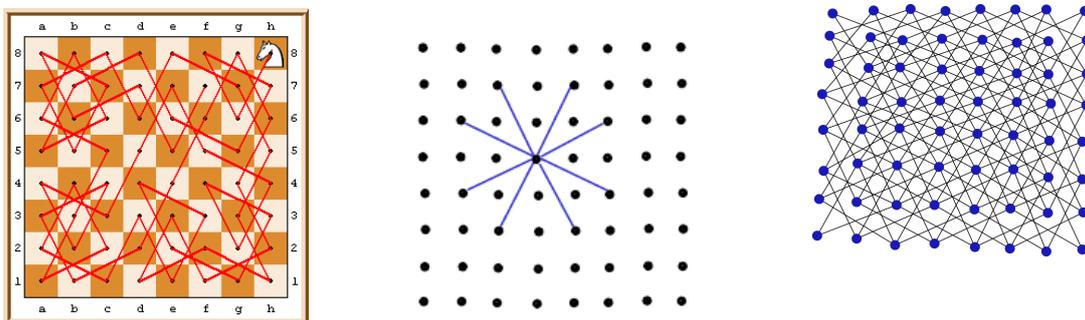
1 Introduction

Les sept ponts de Königsberg



Une énigme Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ? (Leonard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759)

La course du cavalier



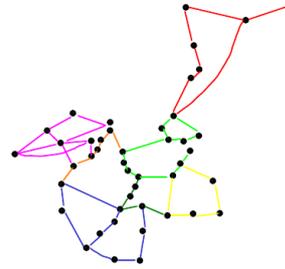
Une autre énigme Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

Un réseau

The pan European KPNQwest network, when complete, will connect major cities together by six high-capacity backbone rings.

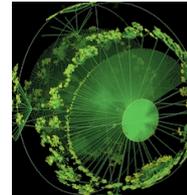
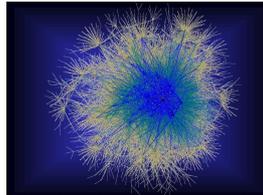
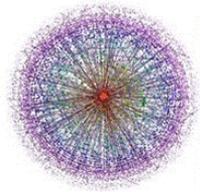
(Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007)



Le graphe du Web

Définition

Ses sommets correspondent aux pages web, ses arêtes aux hyperliens. (Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007)

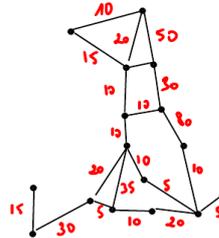


Remarque.

- Ce graphe est tellement énorme que trouver de bonnes manières de le dessiner est un domaine de recherche à part entière.
- Comprendre les propriétés de ce graphe est essentiel pour une compagnie comme Google.

Le voyageur de commerce

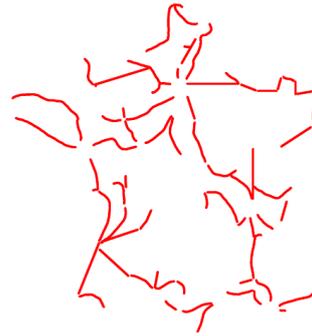
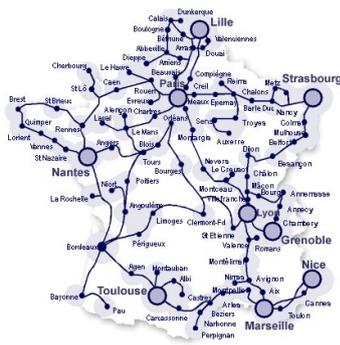
Étant donné un ensemble de destinations, le problème est de trouver un circuit qui visite chaque destination en visitant chacune d'elle exactement une seule fois, le tout en minimisant le coût du voyage.



- William Rowan Hamilton, vers 1800.
- Karl Menger, vers 1930.

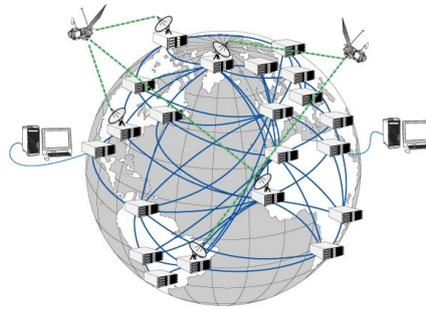
Mise en place d'un réseau mixte cuivre et optique

Une société de téléphonie souhaite câbler entièrement une zone à l'aide de fibres optiques en minimisant le nombre de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s'appuie sur le réseau téléphonique déjà existant.

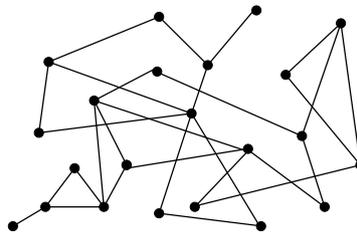


Problème de routage dans un réseau du type internet.

Si un utilisateur désire accéder au contenu d'une page web présentée sur un serveur, une connexion entre ce serveur et la machine de l'utilisateur est nécessaire. Cette connexion n'est en général pas directe mais doit passer par une série de machine relais.



À chaque question concrète, un problème de graphe



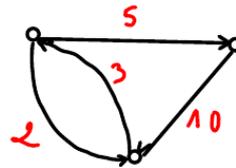
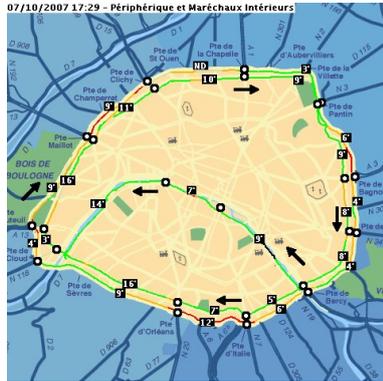
- Les machines *A* et *B* peuvent-elles communiquer ?
 - ★ existence de chaînes
- Si oui, en passant par quels intermédiaires ?
 - ★ détermination de chaînes - longueur de chaînes
- Avec quelles machines la machine *A* peut-elle communiquer ?
 - ★ sommets accessibles - composantes connexes
- Deux machines quelconques peuvent-elles communiquer ?
 - ★ connexité
- Pourrait-on se passer de certaines connexions ?
 - ★ recouvrement
- Trouver un ensemble minimal de connexions préservant la topologie du réseau ?
 - ★ arbre ou forêt de recouvrement minimal
- Si deux machines peuvent communiquer de plusieurs façons, comment choisir la meilleure ?
 - ★ chemins optimaux, distance
- Imprimer le circuit de sorte que les liaisons ne se croisent pas (pour minimiser les couches) ?
 - ★ graphe planaire
- Assurer le fonctionnement du réseau si une des machines tombe en panne ?
 - ★ biconnexité

- Capacité du réseau, problème de débit ?
 - ★ problèmes de flots

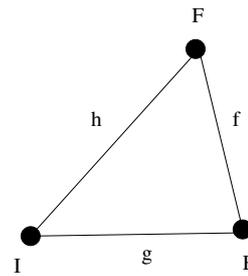
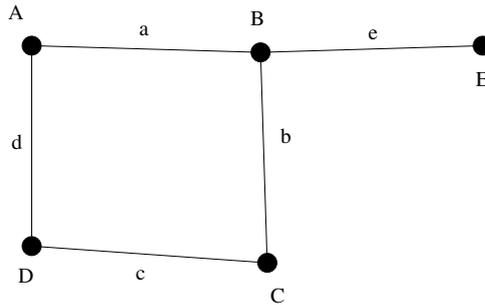
Problème de temps de parcours

Par exemple, autour du périphérique à Paris.

Notons que les temps de parcours dans un sens et dans l'autre ne sont pas forcément les mêmes (notion de graphe orienté).



2 Vocabulaire



« Définition » par l'exemple

- Le graphe est constitué
 - ★ des sommets $\{A, B, C, D, E, F, H, I\}$
 - ★ des arêtes $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- les sommets A et B sont les extrémités de l'arête a
- les sommets A et B sont voisins
- les arêtes a et d sont adjacentes
- l'arête a est incidente au sommet A
- le degré du sommet A est 2.
- $AaBeE$ est une chaîne de notre graphe.
- Les extrémités de cette chaîne sont A et E .
- La longueur de la chaîne est 2.
- En général, on parle en raccourci de la "chaîne ABE ".
- E est accessible à partir de A et A est accessible à partir de E .
- $ABCD$ est un cycle de notre graphe.
- **Attention** : les arêtes doivent être distinctes, c.-à-d. que ABA n'est pas un cycle.
- Composante connexe : ensemble maximal de sommets mutuellement accessibles.
- Les composantes connexes de notre graphe sont $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{F, H, I\}$.
- Un graphe est connexe si tous les sommets sont mutuellement accessibles (c.-à-d. graphe constitué d'une seule composante connexe).
- Notre graphe n'est pas connexe puisqu'il est constitué de deux composantes connexes.

3 Représentation des graphes en machine

Représentations d'un graphe

Question

Comment représenter un graphe afin de le coder en machine ?

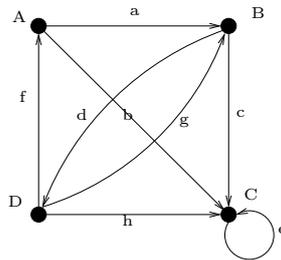
Remarque. La démarche est la même dans le cas d'un graphe orienté ou non. En effet, un graphe (non orienté) est vu comme un graphe orienté où on a un arc dans les deux sens pour chaque arête.

Réponse

Il y a plusieurs solutions.

- avec des listes
- avec des tableaux

Représentations par listes (graphes orientés)



Listes des successeurs

sommet	successeurs
A	B, C
B	C, D
C	C
D	A, B, C

Remarque.

- Alternative : Listes des prédécesseurs.
- Pour un graphe non-orienté, on prend simplement les listes des voisins.

Représentation par tableau (graphes orientés)

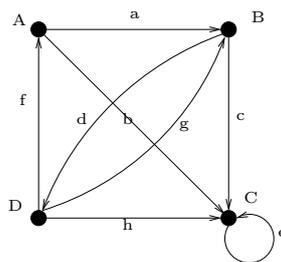


Tableau d'adjacence

origine \ fin	A	B	C	D
A		a	b	
B			c	d
C			e	
D	f	g	h	

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pub : google et la théorie spectrale des graphes On peut même utiliser l'algèbre linéaire (le domaine d'étude des matrices) pour aborder et appréhender autrement les graphes. C'est le cas de l'algorithme d'indexation de google qui repose *grosso modo* sur le calcul d'un vecteur propre de la matrice d'adjacence du graphe du web.

Avantages et inconvénients

- Listes des successeurs
 - ★ **Avantage** : Le stockage utilise moins de mémoire ($s + a$)
 - ★ **Inconvénient** : L'accès prend plus de temps (parcourir les listes)
- Tableau d'adjacence
 - ★ **Avantage** : L'accès est direct ($t[i][j]$)
 - ★ **Inconvénient** : Le stockage utilise plus d'espace (s^2)