# Construction de triangles et inégalité triangulaire en cinquième

**Geneviève Le Quang et Robert Noirfalise**
**(IREM de Clermont-Ferrand)**

## Sommaire



## I. Introduction : "Vers un autre type de processus d'étude"

Ce que nous donne à voir l'enseignement actuel des mathématiques est le plus souvent une étude non motivée d'objets mathématiques. Comme le dit Y. Chevallard l'enseignement "*tend à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs qu'on visite à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessées d'être comprises*"[1]. C'est seulement lorsque l'étude d'un objet est réalisée, en un premier temps, que, dans les meilleurs des cas, des applications en sont alors proposées dans des travaux dirigés ou dans des exercices. Le travail engagé dans le projet de recherche "Ampères" se propose d'inverser ce processus : partir de questions problématiques et n'introduire l'étude d'objets que parce que celle-ci peut contribuer à l'élaboration de réponses, éventuellement partielles, aux questions posées.

La place accordée à l'étude de cette figure emblématique qu'est le triangle, au Collège et au Lycée est, à titre de seul exemple, significative. De multiples propriétés en sont démontrées de multiples manières. Mais qui parmi les professeurs de mathématiques peut encore donner les raisons justifiant d'accorder une telle importance à la géométrie du triangle dans le secondaire ? En quoi cela informe-t-il l'élève sur le monde actuel, à venir ou

[1] Chevallard Y. (2005) :"la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire" in Actes de l'université d'été d'Animath "*La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire*" Ed APMEP, brochure n°168

passé? Ainsi certains contenus de programme semblent perdurer parce que dans la tradition, l'héritage scolaire, les enseigner apparaît « bel et bon » sans plus d'interrogation sur la pertinence de cet enseignement. Sur ce seul cas, et il y en a bien d'autres, on a perdu de vue les questions fondamentales que les propriétés de cet objet permettent de résoudre.

Peut-on développer un enseignement où l'étude d'objets mathématiques est motivée par des questions, c'est ce que nous avons essayé de faire à propos des triangles en classe de cinquième et plus précisément à propos de l'extrait suivant du programme :

| | |
|---|---|
| Construction de triangles et inégalité triangulaire | Construire un triangle connaissant :<br>- la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,<br>- les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,<br>- les longueurs des trois côtés. |

Cette partie de programme apparaît bien de prime abord comme le vestige d'une époque révolue où l'on étudiait les cas d'égalité des triangles, ce qui permettait alors de déterminer des longueurs et des angles, de démontrer des propriétés de configurations. Le programme ajoute d'ailleurs "*ces constructions permettent un premier contact (implicite) avec les trois cas d'isométrie des triangles (théorèmes rencontrés en classe de seconde)*".

**Comment en rendre l'étude dynamique ? Une première réponse est de rechercher des questions à fort pouvoir générateur d'étude et de recherche et qui aient un rapport avec le thème d'étude !**

Nous pouvons trouver deux grandes questions génératrices et motivant un ensemble d'études et de recherches géométriques, les suivantes[2] :

- Comment déterminer des grandeurs géométriques : longueurs, aires, volumes, angles ? Cette grande question générique peut elle même se décomposer en d'autres comme "Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible? Comment déterminer l'aire d'une surface ?
- Comment construire une figure géométrique satisfaisant à des spécifications données ? Nous pouvons citer ici des exemples plus spécifiques pouvant faire l'objet d'études et de recherches : Peut-on construire un cercle passant par deux points, par trois points, par n points ? Ce qui permet d'entrer dans l'étude de la grande question de la cocyclicité que l'on commence à traiter au collège avec l'étude de polygones inscriptibles. Peut-on carrer un rectangle, i.e. construire un carré ayant même aire que le rectangle ?

.

La lecture du programme peut nous conduire à penser que le thème spécifié par le programme est à classer dans le secteur des constructions géométriques "Construire un triangle connaissant…". Certes, il conviendra que techniquement les élèves sachent réaliser de telles constructions, sachent aussi (inégalité triangulaire) à quelles conditions la construction avec la donnée de trois longueurs pour les côtés est possible, mais ce sont là des tâches bien insignifiantes si on ne sait pas pourquoi on peut être amené à réaliser de telles

[2] On pourrait citer aussi la question du repérage dans le plan, dans l'espace, la question également de la représentation plane d'objets de l'espace.

constructions. On est donc amené à se poser la question du pourquoi de ces constructions, se demander "**quelles en sont les raisons d'être?"**

Une des **raisons d'être**[3] de l'étude des triangles apparaissait dans d'anciens programmes traitant des cas d'égalité des triangles : ces derniers permettaient de déterminer la longueur d'un segment en montrant que celui-ci avait même longueur qu'un autre. Le principe consiste à utiliser des triangles "égaux", c'est à dire superposables. On peut ainsi pour déterminer la longueur d'un segment être amené à construire un triangle qui soit superposable à un autre! Cette technique d'usage de triangles superposables conduit alors à se demander **à quelles conditions des triangles sont superposables** !

On obtient ainsi une première esquisse d'une dynamique d'étude : une première question à résoudre : *comment déterminer une longueur que l'on ne peut mesurer directement ?* (une distance inaccessible). Répondre à cette question à l'aide de triangles superposables. Se demander alors, ce sera la deuxième question motivée par la réponse à la première, "*Quelles données suffisent à caractériser un triangle ?*" : Cette deuxième question, formulée classiquement étant ici comprise dans le sens" *Quelles données sur un triangle suffisent pour pouvoir en construire un autre qui lui soit superposable ?*".

Cette dernière question, l'étude engagée, conduit elle même à des questions que nous qualifierons de cruciales, questions qui vont permettre de traiter des cas d'isométries, et ajoutons nous, aussi de cas où il n'y a pas isométrie.

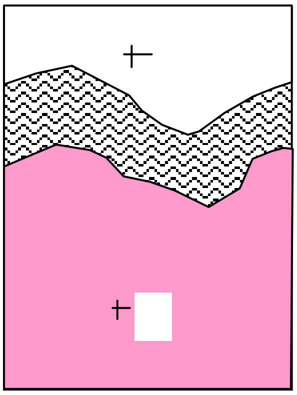
Ce que nous cherchons à faire, de manière générique, est que ce soit la dynamique de l'étude qui amène à se poser de telles questions. Ce qui signifie qu'elles doivent être fondées en raison, celle-ci étant trouvée dans le savoir et son organisation et donc dans son étude, même si c'est le professeur qui est amené à les poser. On peut alors espérer que ces questions soient naturellement acceptées par les élèves et que leur dévolution s'opère sans problème parce qu'ils les acceptent de manière nécessaire à ce moment de l'étude.

## *II Un exemple d'activité d'étude et de recherche*

**Voici ce que nous avons expérimenté dans une classe de cinquième. Quelques remarques au fil du texte évoquent d'autres façons qui auraient pu être exploitées.**

[3] Il y en a d'autres : les triangles servent aussi à la détermination des aires d'une surface plane : on découpe, (de façon éventuellement approchée), la surface en triangles. Sachant calculer l'aire d'un triangle, on sait calculer (de façon approchée) l'aire de la surface. Avec une telle raison d'être, il conviendrait de se demander quelles sont les données utiles pour déterminer l'aire d'un triangle ou encore se demander si avec telles données on peut en calculer l'aire et si oui, comment? Connaissant les longueurs des trois côtés d'un triangle peut-on en calculer l'aire? La formule de Héron est une réponse à cette dernière question.

## 1° Tout d'abord une question portant sur une détermination de distance inaccessible :



Déterminer la longueur du segment [AM].

On peut opérer des mesures dans la partie rosée mais on n'a pas le droit de franchir la partie grisée. On peut avec un appareil de visée, viser la direction du point M en se plaçant en A

Le dessin de gauche se trouvait sur une feuille 21 × 29,7 fournie par le professeur. Cette situation évoque celle d'un géomètre topographe[4] qui a à déterminer une distance entre deux points, l'un d'entre eux (M), lui étant inaccessible. Le géomètre peut opérer sur une partie représentée par la partie rosée : il peut mesurer des longueurs, des angles, il a pour cela des appareils pour le faire. En revanche, la partie grisée peut représenter une rivière qu'il ne peut franchir! Il doit cependant déterminer la distance entre les points A et M. Au passage, s'il existe bien d'autres outils, comme les laser mètres, pour déterminer des distances entre points, la triangulation et le recours aux propriétés du triangle et à la trigonométrie restent encore une pratique contemporaine des topographes.

*Image empruntée au site " [http://www.topograph.eu/](http://www.topograph.eu/)"*

La partie de la feuille sur laquelle les élèves étaient autorisés à travailler était recouverte d'une feuille rose. Les élèves disposaient de leurs instruments de géométrie et « d'appareils de visée » sommaires. Les élèves de 5[e] ne pensent généralement pas à placer un point B et à faire

[4] La topographie est une technique qui consiste à mesurer des angles, des distances, des altitudes ou la position de points au sol dans le but d'établir un plan ou d'appliquer sur le terrain les éléments d'un projet. Ce projet peut être un ouvrage d'art (pont, viaduc, bâtiment...), une route, une voie ferrée, un lotissement, etc. Le topographe est donc le technicien de la mesure et de la conception des projets qui exerce pour un cabinet de géomètre ou pour le compte d'une entreprise ou d'une collectivité.

les « relevés » nécessaires pour tracer un triangle A'B'M' « isométrique » du triangle ABM. Aussi le professeur leur montre-t-il comment faire: placer un point B dans la partie rosée de la feuille, mesurer la distance AB, puis avec deux visées mesurer les angles en A et en B du triangle ABM. Ceci fait, tracer sur une feuille transparente 21×29,7 un triangle A'B'C' "isométrique" du précédent en traçant [A'B'], segment de même longueur que [AB] et puis [A'M'] et [B'M'] en se servant des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ . Vérifier que A'B'M' est un triangle superposable à ABC. La mesure A'M' donne AM. Le professeur peut aussi évoquer non pas un triangle isométrique au triangle ABC mais une réduction de celui-ci, ce qui permet alors de faire un tracé à une échelle réduite, ce qui est plus réaliste pour traiter le cas évoqué du travail du topographe. Nous donnons en annexe un extrait qui montre un usage certes ancien de ce type de pratique (annexe). Le professeur peut aussi préciser qu'aujourd'hui le topographe dispose de moyens de calculs permettant de déterminer AM, calculs qui supposent l'usage de quelques outils mathématiques que les élèves auront l'occasion d'étudier, en partie au moins en quatrième et en troisième.

**Notons, c'est d'importance, que nous nous émancipons ici du principe voulant que dans une activité introduite par un problème, les élèves puissent avoir, grâce à leur répertoire de connaissances, la possibilité d'élaborer eux-mêmes une stratégie de résolution[5].** Leur répertoire de connaissances leur permet néanmoins de comprendre le problème posé.

## 2° Comment déterminer un triangle pour pouvoir en construire un superposable à un triangle donné ?

La technique de résolution avec construction d'un triangle superposable étant introduite par le professeur, selon le principe de questionnement dynamique évoqué ci-dessus une deuxième question est posée : "Comment déterminer un triangle ?"

Nous proposons aux élèves pour étudier cette question, la suite de tâches suivantes :

| |
|---|
| Q1 – Sur une feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ? |

Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (l'activité a été expérimentée au mois de décembre) le triangle demandé et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et ils peuvent vérifier leur construction grâce au calque du professeur.

| |
|---|
| Q2 – Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent 59°, 74° et 47°. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ? |

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé à propos de la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Certains se rendent compte très rapidement qu'il n'y aura

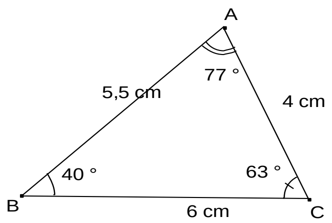
[5] Nous n'ignorons pas pour autant le problème du paradoxe du professeur mis en évidence par G. Brousseau. Le fait de s'autoriser à donner des réponses existantes dans la culture nous conduit à nous interroger sur les conditions pouvant faire que l'élève accepte ces réponses sans pour autant se soumettre à l'autorité professorale mais bien à l'autorité du contenu.

pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée – d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par deux voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique et que, par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur. Les élèves dessinent alors un deuxième triangle ayant les mêmes angles que le précédent mais « beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit » que le premier tracé.

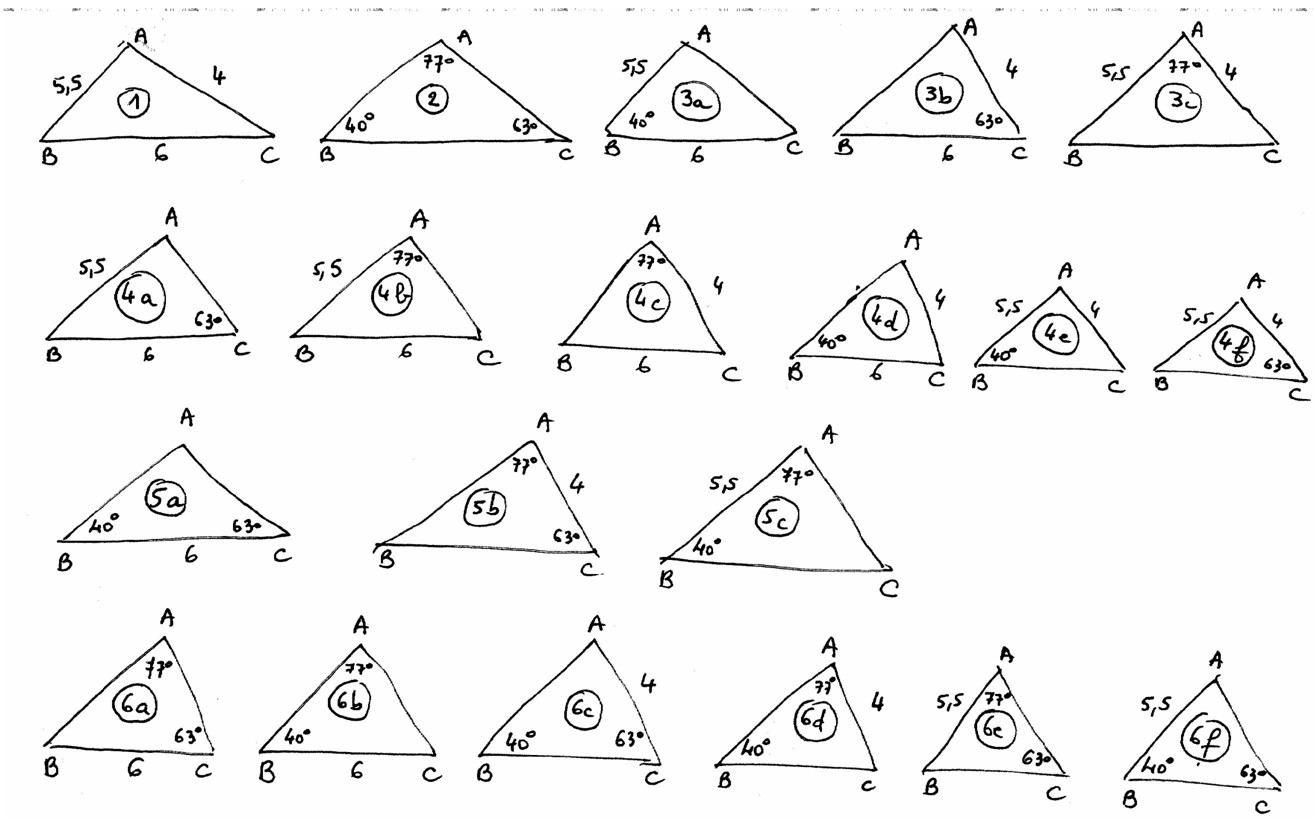
### *3° Est-ce que 2, 3 ou 4 données suffisent pour déterminer un triangle ?*

| |
|---|
| Q3 – Est-ce que 2 données suffisent pour déterminer un triangle ?<br>- Est-ce que 3 données suffisent pour déterminer un triangle ?<br>- Est-ce que 4 données suffisent pour déterminer un triangle ? |

Avant de donner ces questions, le professeur avait conduit les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et comme nous l'avons déjà dit que « déterminer un triangle » revient à caractériser le triangle de façon à obtenir, par construction, des triangles tous superposables. Cette remarque pourrait donner lieu à une question cruciale que l'on pourrait tenter de faire vivre ultérieurement, dans une autre classe confrontée pour la première fois à ce même travail ; ce qui induirait peut-être les élèves à se poser eux mêmes les questions de la troisième consigne.
Le triangle de la question 1 étant « grand », un autre triangle est proposé par le professeur qui invite alors les élèves à choisir deux données afin de voir s'il est possible de construire un triangle superposable au triangle donné.




**2 données :** les élèves essaient 2 côtés, 2 angles, 1 côté et un angle et dessinent plusieurs triangles. Certaines constructions posent des problèmes, notamment celle où l'on choisit la longueur BC et l'angle A. Néanmoins, la conclusion s'impose vite : deux données ne suffisent pas !
**3 données :** dans une phase collective, les élèves sont invités à faire le recensement de tous les cas possibles : 3 côtés, 3angles, 2côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, 2 côtés et un angle « quelconque »par exemple les longueurs AB et BC et l'angle C, 1 côté et les deux angles dont les sommets sont les extrémités du côté enfin 1côté et deux angles « quelconques » (voir ci-dessous la reproduction de ce qui a été noté au tableau).




Les cas étant nombreux à étudier le professeur organise le travail dans la classe pour que les élèves ne construisent pas tous les triangles mais chaque élève aura étudié 7 cas : 1, 2, 3a, 4a, 4b, 5a et 6a pour certains, 1, 2, 3b, 4c, 4d, 5b, 6b pour d'autres…

3 côtés : les élèves font référence à la première question, le triangle construit est le même pour tous : la donnée des longueurs des trois côtés détermine le triangle.

3angles : ici c'est la question 2 qui permet de répondre.

2 côtés, 1 angle :

Les cas 3 ne présentent pas de difficultés et on retiendra que la donnée des longueurs de deux côtés et de la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés déterminent le triangle. Les cas 4a et 4b (ainsi que les quatre suivants) donnent des résultats qui permettent de conclure que la donnée de deux côtés et d'un angle non compris entre ces deux côtés ne détermine pas un triangle (il y a deux triangles dans un cas et un seul dans l'autre).

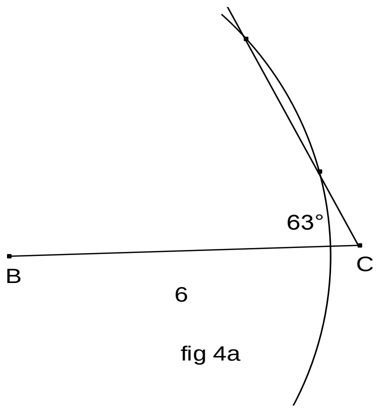



fig 4a

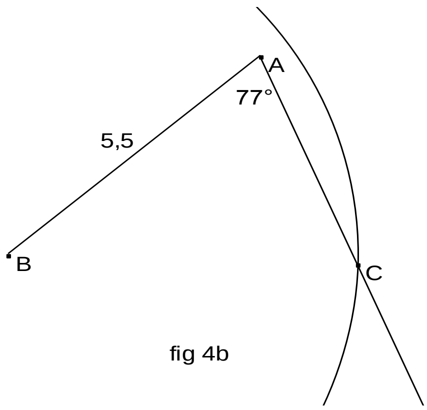
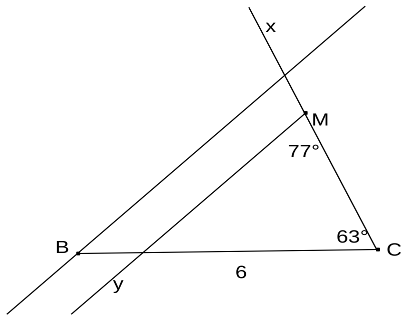



fig 4b

1 côté, deux angles : pas de difficultés particulières pour les cas 5a, 5b et 5c mais pour le cas 6 certains élèves sont en difficulté tandis que d'autres utilisent leurs connaissances antérieures notamment la propriété des angles correspondants formés par des droites parallèles : après avoir tracé [BC], ils tracent la demi-droite [Cx) telle que l'angle C mesure 63°, choisissent un point M sur [Cx) et mesurent un angle M de 77°. Il ne reste plus qu'à tracer la parallèle à [My) passant par B pour obtenir le triangle. Le professeur indique que ce cas ne sera pas retenu mais qu'un peu plus tard dans le chapitre on saura pourquoi.




**4 données :** le professeur procède comme pour 3 données et recense les différents cas au tableau : 3côtés et 1angle, 3angles et 1côté, 2côtés et 2 angles. Les élèves s'aperçoivent rapidement que l'on retrouve l'un des trois cas précédents dans lesquels le triangle est déterminé.

Les élèves notent alors dans leur classeur de cours : pour pouvoir construire un triangle superposable à un triangle donné il faut connaître : (suivent les trois cas avec une figure)

## *4° L'inégalité triangulaire*

| |
|---|
| Q4 – Étant donné trois nombres (qui représentent les mesures des longueurs de trois segments) peut-on toujours construire un triangle ? |

Les élèves sont sollicités pour choisir un nombre décimal compris entre 0 et 12 et le professeur note (ce qui l'intéresse) au tableau afin de retenir trois triplets, par exemple,
a) 2,6 ; 3 ; 9  b) 7,2 ; 10 ; 6  c) 8 ; 11 ; 3
Comme cela a déjà été décrit[6], les élèves ne sont pas d'accord sur le cas c) même lorsque les nombres choisis sont des entiers, certains obtenant un triangle très aplati. Une visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique permet de convaincre assez facilement l'ensemble de la classe.

## *5° La somme des angles du triangle*

Les élèves doivent tracer un triangle quelconque, en mesurer les angles puis faire la somme des mesures obtenues. La comparaison des résultats montre que les sommes obtenues sont proches de 180°.

[6] Arsac Gilbert (1997/98) : les limites d'un enseignement déductif de la géométrie *Petit x* N°47

Q5 – Est-il possible de tracer un triangle dont la somme des angles est très différente de 180 ? Si oui, faire la construction ; si non expliquer pourquoi.

Quelques élèves, peu nombreux, sont persuadés que la somme est 180° et ils tentent d'expliquer qu'il en est ainsi car lorsqu'un angle augmente, les autres diminuent (ils miment avec leurs mains le triangle « en train de s'aplatir » !). Les autres élèves essaient d'obtenir une somme supérieure à 180° en faisant un triangle le plus grand possible sur une feuille A3, ou en partant d'un angle « franchement » obtus, ou encore en partant d'un triangle ABC ayant un angle Â de 90° et un angle B de 89° qui se révèle difficile à construire, le tableau n'étant pas assez long lorsqu'on choisit AB = 10cm. Il sera finalement tracé avec un angle B de 88° pour s'apercevoir que l'angle C mesure environ 2° ! Comme pour l'inégalité triangulaire, un logiciel de géométrie dynamique permet de se rendre compte que pour de très nombreux triangles la somme des angles reste de 180°.

Q6 – Connaissez-vous un triangle pour lequel vous êtes sûrs mathématiquement que la somme des angles est égale à 180 ?

Les élèves proposent le triangle équilatéral mais hélas leur raisonnement est faux : ils annoncent que chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60° et à la question pourquoi ? ils répondent 180 / 3 = 60 ! Ceux qui proposent le triangle rectangle isocèle font la même erreur de raisonnement. Dans une classe deux élèves proposent le triangle aplati rencontré lors du travail sur l'inégalité triangulaire.
Il reste maintenant à prouver le résultat, il est difficile pour les élèves d'ajouter un élément sur la figure (une droite passant par l'un des sommets et parallèle au côté opposé) même si les élèves peuvent dire que 180° c'est un angle plat. En revanche lorsque cette droite est tracée, ils reconnaissent des angles alternes-internes et la démonstration est bien comprise.

Le chapitre se termine par quelques exercices de construction mettant en œuvre toutes ces propriétés.

## *Annexe : La planchette des ingénieurs de la renaissance* :

- On peut lire sous la plume de Pascal Briost et Alexandre Bruneau[7] comment des ingénieurs de la renaissance s'y prenaient pour faire des mesures des fortifications tenues par des armées adverses et dont ils ne pouvaient s'approcher sans mettre leur vie en péril. La citation est longue mais nous la reproduisons car on peut se demander s'il n'y a pas là matière à alimenter un parcours d'étude et de recherche sur le thème des "distances inaccessibles". **Est-il possible d'en faire un usage, par exemple de proposer quelques expérimentations en classe et ensuite de demander ce qui fait que cela peut marcher, ce qui nécessite à la fois un travail sur les échelles et sur les triangles semblables (**pourquoi pas un exercice en classe de seconde)?
- Texte: extrait de " Pascal Briost et Alexandre Bruneau (2006) les mathématiciens dans la cité; le cas des ingénieurs de la Renaissance in M.J.Durand –Richard (ed), les mathématiques dans la cité Col. Culture et Société, PUV

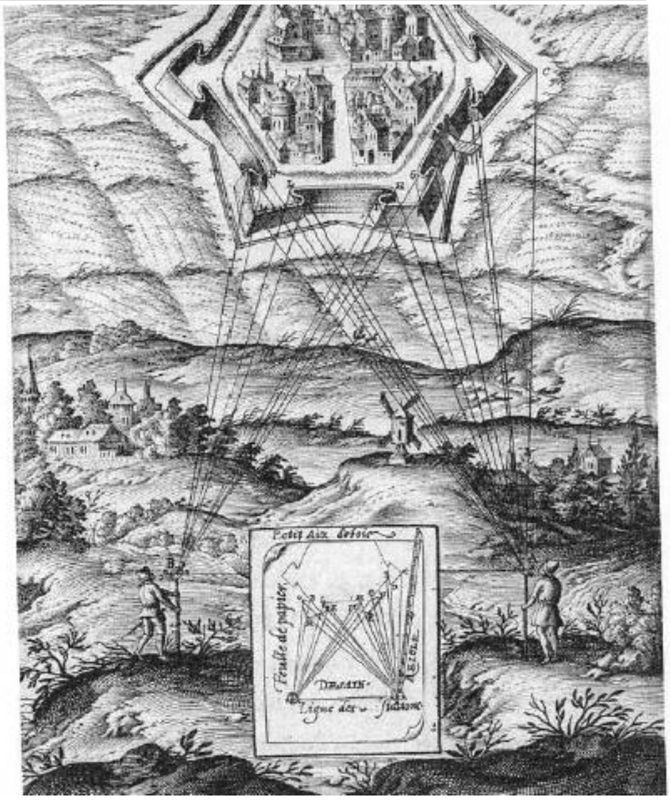
Pour l'essentiel, le travail des ingénieurs se faisait au cordeau. Néanmoins, un certain nombre d'instruments sont décrits par les auteurs qui peuvent avoir été utilisés pour mesurer des hauteurs et des distances.

L'instrument de base le plus familier des géomètres est incontestablement **la planchette,** une planche de bois (35x28cm) posé sur un trépied, et sur laquelle est posée une feuille de papier plus une alidade, c'est à dire un mécanisme de visée. La méthode de la planchette pour le relevé planimétrique, expliquée notamment par le suisse L.Zubler (1563-1609) fonctionne de la manière suivante.

On choisit d'abord deux endroits A et B d'où l'on va faire les levées et dont on a préalablement mesuré la distance. On reporte ensuite sur le papier deux points A' et B' correspondant aux deux points de levée A et B et puis on procède en deux étapes.

On commence par positionner la table en A et on place l'alidade le long de la ligne A'B' puis on tourne la table et la carte qui y est fixée jusqu'à ce que la ligne A'B' corresponde exactement à la ligne AB. On met en place l'alidade de telle sorte qu'une autre position, disons C, soit visible depuis A. On tire ensuite, le long de l'alidade, un trait correspondant à la ligne A'C (cette opération peut être itérative pour d'autres points).

On installe ensuite la table en B ? On place l'alidade sur la ligne B'A' et on positionne la carte de telle sorte que B'A' se superpose à la ligne BA. On manœuvre ensuite l'alidade afin que les rayons tracés entre B'et C ou D croisent les rayons tracés depuis A'. Les intersections déterminent alors les points C' et D' (un côté et 2 angles adjacents toujours un triangle, c'est le principe même de la triangulation). On peut faire une mesure avec un troisième point pour vérifier que l'on ne s'est pas trompé.



Ci contre, une gravure schématisant l'usage de la planchette. Philippe Danfrie, déclaration de l'usage du graphomètre, Paris, 1597