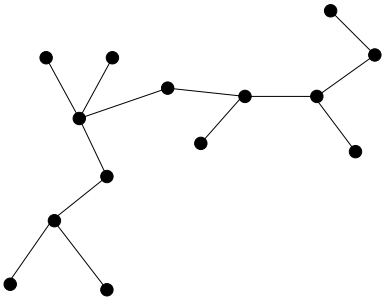
IREM de Clermont-Ferrand
Formation ISN
Algorithmique

13 décembre 2013
Alex Esbelin
Malika More

Arbres

1 Généralités

Définition graphe non orienté $\left\{\begin{array}{l}\text{connexe}\\ \text{sans cycle}\end{array}\right.$ arbre *T (tree)*



$\left\{\begin{array}{l}\text{non connexe}\\ \text{sans cycle}\end{array}\right.$ ... plusieurs arbres ... forêt

$\left\{\begin{array}{l}\text{connexe}\\ \text{avec cycle(s)}\end{array}\right.$ pas arbre

$\left\{\begin{array}{l}\text{non connexe}\\ \text{avec cycle(s)}\end{array}\right.$ pas arbre

sommet de degré 1 ... au bout d'une branche ... feuille

Construction

- Un graphe avec un seul sommet
  et zéro arête est un arbre
- À partir d'un arbre avec au moins 1 sommet
  - ⋆ On accroche une feuille n'importe où
  - ⋆ On obtient un arbre avec un sommet et une arête de plus

Mise en oeuvre

Exercice 1.

1. Trouvez tous les arbres à 4 sommets à isomorphisme près.
2. Trouvez tous les arbres à 5 sommets à isomorphisme près.

Remarque.

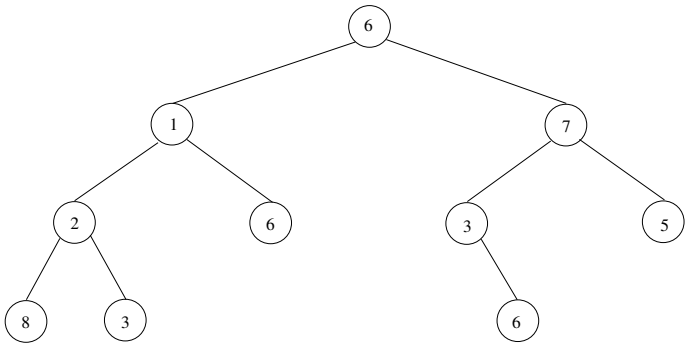
1. Un arbre à n sommets possède exactement $n-1$ arêtes.
2. Un arbre avec au moins deux sommets a forcément au moins une feuille.

Propriétés caractéristiques

1. deux sommets quelconques d'un arbre sont reliés par une unique chaîne
2. enlever une arête quelconque à un arbre le déconnecte
3. ajouter une arête quelconque à un arbre crée un cycle

Remarque. Un graphe ayant ces propriétés est forcément un arbre.

Arbre enraciné

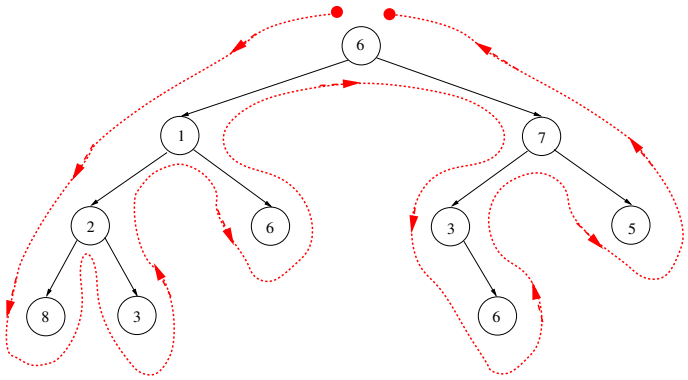


- Racine
- Orientation
- Père et fils
- Fils droit / Fils gauche
- Ancêtre et descendant
- Sous-arbre
- Structure « naturellement » récursive

On se limite au cas des arbres binaires Chaque nœud a au plus deux fils

2 Parcours d'arbres en profondeur

Parcourir les nœuds en suivant les arcs



Principe

- Départ : Racine
- Descendre, descendre...
- Remonter, redescendre...
- Etc.
- Remonter, remonter...
- Arrivée : Racine

Trois variantes

- Parcours préfixe
- Parcours postfixe
- Parcours infixe

Parcours préfixe
Principe
On traite d'abord la racine, puis on parcourt récursivement le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit

Illustration
$6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5$

Algorithme

```
Fonction Pref(A : nœud)
début
    si A ≠ NULL alors
        Traiter(A)
        Pref(FilsGauche(A))
        Pref(FilsDroit(A))
    fin
fin
```

Parcours postfixe
Principe
On parcourt récursivement le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit, puis on traite la racine

Illustration
$8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6$

Algorithme

```
Fonction Postf(A : nœud)
début
    si A ≠ NULL alors
        Postf(FilsGauche(A))
        Postf(FilsDroit(A))
        Traiter(A)
    fin
fin
```

Parcours infixe
Principe
On parcourt récursivement le sous-arbre gauche, puis on traite la racine, et ensuite on parcourt récursivement le sous-arbre droit

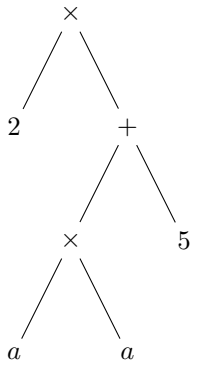
Illustration
$8 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5$

Algorithme

```
Fonction Inf(A : nœud)
début
    si A ≠ NULL alors
        Inf(FilsGauche(A))
        Traiter(A)
        Inf(FilsDroit(A))
    fin
fin
```

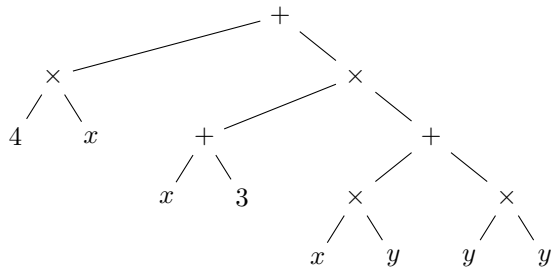
Arbres syntaxiques

- On associe à l'expression $2(a^2 + 5)$ l'arbre ci-dessous :
- À toute expression mathématique, on associe un arbre enraciné qui traduit la construction récursive de l'expression.
- Les feuilles représentent les nombres ou les variables et les nœuds intérieurs représentent les opérations.



Exercice 2.

1. Construire l'arbre associé à l'expression : $(x + y)^2 + (2x + 1)(y + 3)$
2. Déterminer l'expression associée à l'arbre :



Parcours préfixe

$\times 2 + \times aa5$

- Notation polonaise
- Pas besoin de parenthèses

Parcours postfixe

$2aa \times 5 + \times$

- Notation polonaise inversée
- Pas besoin de parenthèses
- Permet une évaluation récursive de l'arbre

Parcours infixe

$2 \times a \times a + 5$

- Problème de parenthèses...
- Première visite $\longrightarrow$ (
- Dernière visite $\longrightarrow$)
- Sauf pour les feuilles
- $(2 \times ((a \times a) + 5))$

Exercice 3.

1. Déterminer la notation polonaise inversée correspondant à l'expression :

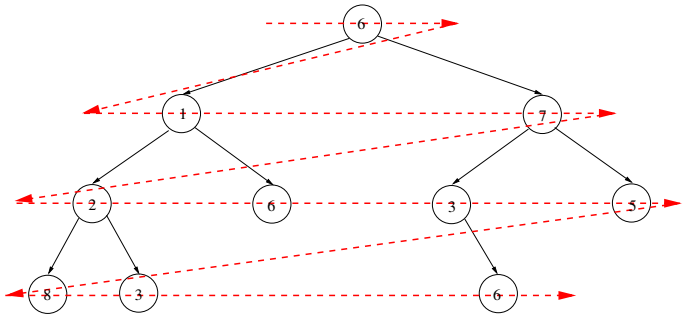
$$(x + y)^2 + (2x + 1)(y + 3)$$

2. Déterminer l'expression associée à la notation polonaise :

$$\times + \times 3xy + 5 \times 2y$$

3 Parcours d'arbres en largeur

Parcourir les nœuds niveau par niveau



Principe
- Départ : Racine
- Parcourir les fils de la racine
- Puis les fils des fils de la racine
- Etc.
- Arrivée : dernier nœud du dernier niveau

Illustration
$6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6$

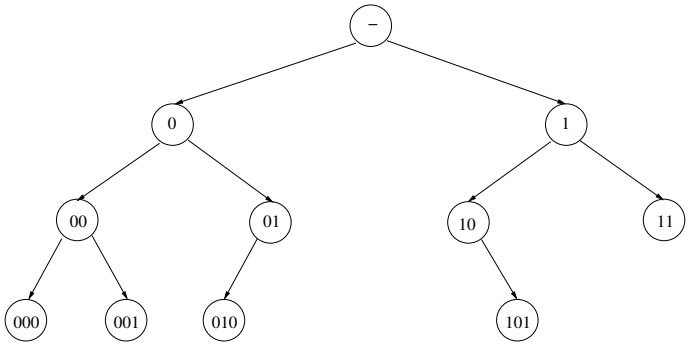
Remarque
Pas de récursivité naturelle dans ce cas

Algorithme

Fonction `Larg`(*i : niveau*)

```
début
    Donner à i la valeur 0
    tant que i ≤ max faire
        pour A de niveau i faire
            Traiter(A)
        fin
        Donner à i la valeur i + 1
    fin
fin
```

Étiqueter les nœuds



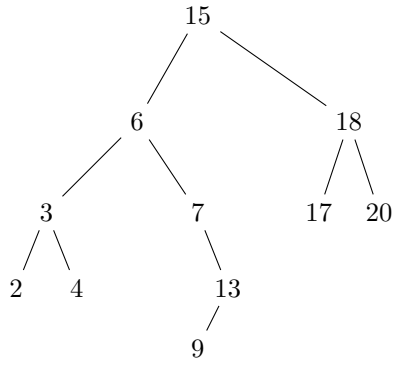
Principe
- Racine $\rightsquigarrow -$
- Fils gauche $\rightsquigarrow 0$
- Fils droit $\rightsquigarrow 1$
- Etc.
- Fils gauche de $w \rightsquigarrow w0$
- Fils droit de $w \rightsquigarrow w1$

Parcours en largeur
$- \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 00 \longrightarrow 01 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 000 \longrightarrow 001 \longrightarrow 010 \longrightarrow 101$

Observation
On visite les nœuds dans l'ordre lexicographique de leurs étiquettes.

4 Arbres binaires de recherche

4.1 Définition



Organisation des étiquettes
Pour tout nœud x :
- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre gauche de x sont inférieures à l'étiquette de x
- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre droit de x sont supérieures à l'étiquette de x

Remarque. Pour simplifier, on suppose que les étiquettes des nœuds sont toutes différentes.

4.2 Recherche d'une valeur

Y-a-t-il un nœud étiqueté 13 ?

- Départ : Racine 15 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche
- Racine 6 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous-arbre droit
- Racine 7 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous arbre droit
- Racine 13 $\longrightarrow$ trouvé !

Y-a-t-il un nœud étiqueté 16 ?
- Départ : Racine 15 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous-arbre droit
- Racine 18 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche
- Racine 17 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche $\longrightarrow$ n'existe pas $\longrightarrow$ il n'y en a pas !

Algorithme

```
Fonction Rech(x : label, A : nœud)
début
    si x = label(A) ou A = NULL alors
        Traiter(A)
    sinon
        si x < label(A) alors
            Rech(x, FilsGauche(A))
        sinon
            Rech(x, FilsDroit(A))
        fin
    fin
fin
```

Pour aller plus loin
Questions
- Comment trouver le maximum dans un ABR ?
- Comment trouver le minimum dans un ABR ?

Recherche du maximum
- On va toujours à droite...

Algorithme

```
Fonction Max(A : nœud)
début
    B prend la valeur FilsDroit(A)
    si B = NULL alors
        Traiter(A)
    sinon
        Max(B)
    fin
fin
```

4.3 Parcours infixe d'un ABR

Algorithme

```
Fonction Inf(A : nœud)
début
    si A ≠ NULL alors
        Inf(FilsGauche(A))
        Traiter(A)
        Inf(FilsDroit(A))
    fin
fin
```

Résultat

- Départ $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ 4 $\longrightarrow$ 6 $\longrightarrow$ 7 $\longrightarrow$ 9 $\longrightarrow$ 13 $\longrightarrow$ 15 $\longrightarrow$ 17 $\longrightarrow$ 18 $\longrightarrow$ 20 $\longrightarrow$ Fin

Observation

- Le parcours infixe d'un ABR traite les nœuds en suivant l'ordre de leur étiquette

Pour aller plus loin

Questions

- Comment trouver le successeur d'un nœud dans un ABR ?
- Comment trouver le prédécesseur d'un nœud dans un ABR ?

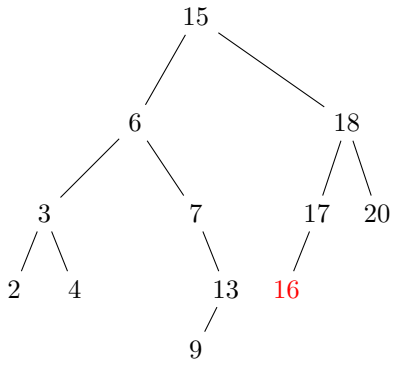
Recherche du successeur de A

- Si A possède un fils droit, le successeur de A est le minimum du sous-arbre droit de A
- Sinon, le successeur de A est le premier ancêtre de A en remontant dans l'arbre (s'il existe) dont A se trouve dans le sous-arbre gauche, car aucun nœud ne peut s'intercaler entre A et cet ancêtre
- Sinon, A est le maximum de l'arbre

Algorithme

```
Fonction Succ(A : nœud)
début
    si FilsDroit(A)≠ NULL alors
        Max(FilsDroit(A))
    sinon
        B prend la valeur Pere(A)
        tant que B ≠ NULL et
        A =FilsDroit(B) faire
            A prend la valeur B
            B prend la valeur Pere(B)
        fin
        Traiter(B)
    fin
fin
```

4.4 Ajouter un élément à un ABR



Question
- Ajouter un nœud portant l'étiquette 16 ?

Recherche de la position
- On utilise la fonction de recherche d'une valeur dans un ABR
- Comme l'étiquette 16 n'apparaît pas, on obtient la valeur `NULL`
- Correspondant à la position que devrait occuper le nœud
- On ajoute une feuille d'étiquette 16 à cet endroit

Insertion (provisoire)

Fonction `Insert`(x :*label*,A :*nœud*)

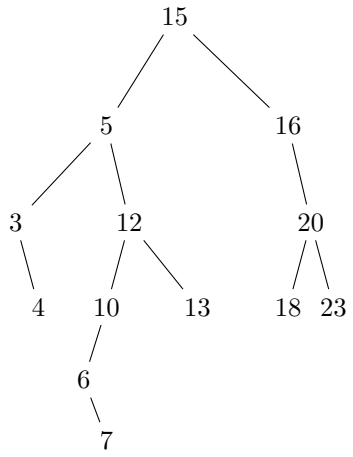
```
début
    si x = label(A) ou A = NULL alors
        Donner à label(A) la valeur x
    sinon
        si x <label(A) alors
            Insert(x, FilsGauche(A))
        sinon
            Insert(x, FilsDroit(A))
        fin
    fin
fin
```

Problème
- Traditionnellement `NULL` n'est pas un nœud
- On aura une fonction à trois paramètres
  - ⋆ x : valeur à insérer
  - ⋆ A : nœud courant (peut-être `NULL`)
  - ⋆ B : père du nœud courant
- On appellera `Insert`(x,`Racine`,`NULL`)
- On doit (?) aussi traiter le cas où l'arbre est vide au départ
- Bref, c'est un peu plus compliqué

Insertion

```
Fonction Insert(x, A, B)
début
    si A = NULL alors
        si B = NULL alors
            CréerABR(x, NULL, NULL)
        sinon
            si x <label(B) alors
                Donner à FG(B) la valeur x
            sinon
                Donner à FD(B) la valeur x
            fin
        fin
    sinon
        si x <label(A) alors
            Insert(x, FG(A),A)
        sinon
            Insert(x, FD(A),A)
        fin
    fin
fin
```

Pour aller plus loin
5cm
<1-2>



Question
- Comment supprimer un nœud dans un ABR ?

Trois cas
- Si le nœud à supprimer est une feuille (par exemple 13) $\rightsquigarrow$ facile
- Si le nœud à supprimer n'a qu'un seul fils (par exemple 16 ou 10) $\rightsquigarrow$ facile
- Si le nœud à supprimer a deux fils (par exemple 5) $\rightsquigarrow$ moins facile...

4.5 ABR vs. dichotomie

Recherche dichotomique dans un tableau trié

Valeur	2	3	4	6	7	9	13	15	17	18	20
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Ce tableau T contient-il la valeur 13 entre les indices 0 et 10 ?
- Je me place au milieu du tableau : indice $0 + \lfloor \frac{10-0}{2} \rfloor = 5$ et valeur $T[5] = 9$
- On a $9 < 13 \rightsquigarrow$ chercher la valeur 13 entre les indices $5 + 1 = 6$ et 10 du tableau
- Etc.

Ajouter un élément dans un tableau trié

Valeur	2	3	4	6	7	9	13	16	15	17	18	20
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Ajouter la valeur 16 aux valeurs du tableau T ?
- Je crée un tableau T' avec une case de plus
- Je commence à recopier le tableau T dans le tableau T' à partir de l'indice 0
- Lorsque j'atteins la position où doit se trouver 16, je l'insère
- Je finis de recopier T dans T'

Questions de structures de données
- Tableau : structure de données statique
- Arbre : structure de données dynamique

Questions de complexité
- Tableau trié
  - ⋆ Le nombre d'opérations élémentaires requis par la plupart des algorithmes est proportionnel au nombre d'éléments du tableau
- Arbre binaire de recherche
  - ⋆ Le nombre d'opérations élémentaires requis par la plupart des algorithmes est proportionnel à la hauteur de l'arbre