IREM de Clermont-Ferrand
Formation ISN
Codes Correcteurs

30 Juin 2011
Alex Esbelin
Malika More

Codes de distance trois et davantage

1 Exercices

Exercice 1. On considère le code linéaire $\mathcal{C}_{n,m}$ défini par la matrice de contrôle H ci-dessous.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la longueur m des mots d'information et la longueur n de chaque mot de code.

2) Soit μ un message dont tous les bits sont égaux à 1 ; μ est-il un mot de code ?

3) Montrer que ce code est un code de Hamming. Que peut-on dire de la correction des messages ayant k erreurs, pour $1 \leq k \leq 7$?

4) Si p est le taux d'erreur sur un bit, et si les erreurs par bit sont indépendantes, exprimer en fonction de p la probabilité qu'un message devienne, après correction automatique, un mot de code différent du mot de code émis. Donner une valeur approchée de cette probabilité pour $p = 0,1$ puis pour $p = 0,01$.

Exercice 2. On considère le code pseudo-Hamming défini par la matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer la distance minimale de ce code. Que peut-on en déduire sur la détection et la correction des erreurs ?

2) En déduire la matrice de surcodage Q puis la matrice génératrice G.

3) Coder le mot d'information $i = D5_{hexa}$.

3) Calculer le tableau standard du code.

4) Contrôler, éventuellement corriger, puis décoder si possible les messages binaires $M_1 = D5E_{hexa}$, $M_2 = D7E_{hexa}$, $M_3 = C7E_{hexa}$, $M_4 = 97E_{hexa}$.

2 Corrigés des exercices

Exercice 1. *1)* $m = 4$ *et* $n = 7$ *,* *2) oui ,* *3) Les 7 mots de 3 bits non nuls sont les colonnes de* H*. Les messages ayant 1 erreur sont tous bien corrigés ,* *et les messages ayant au moins 2 erreurs sont tous mal corrigés. ,* *4)* $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1-p)^6((1-p) + 7p)$ *;* $\simeq 0,15$ *;* $\simeq 0,002$

Exercice 2. $d = 3$, *ce code permet de détecter deux erreurs et d'en corriger une,* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D5E_{hexa}$,

tableau standard en hexa :

syndrome	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
vec. de cor.	008	004	800	002	400	200	100	001	080	040	020	010	*NC*	*NC*	*NC*

,

$S_1 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ *, pas de bit erroné, mot d'info* $D5_{hexa}$, $S_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ *, vecteur de correction* 020_{hexa}*, mot de code corrigé* $D5E_{hexa}$*, mot d'info* $D5_{hexa}$, $S_3 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ *, vecteur de correction* 010_{hexa}*, mot de code corrigé* $C6E_{hexa}$*, mot d'info* $C6_{hexa}$, $S_4 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ *, erreur multiple, pas de correction possible.*