



## **Groupe de travail IREM-Maison pour la Science**

### **Document de travail**

**Annie Noirfalise**

**16 septembre 2014**

### **Réflexions suite aux échanges du 28 mai 2014**

#### **Introduction :**

Dans le document qui suit, je vais essayer de revenir sur certains points de nos échanges : ceux qui, de mon point de vue, me paraissent importants.

Actuellement on assiste à de nombreuses discussions entre « spécialistes », suscitées par les évaluations publiées récemment par la DEPP : « Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés ». Pour comprendre les débats il est nécessaire, me semble-t-il, de se poser une question toute simple : pourquoi enseigner des mathématiques et, pour ce qui nous intéresse ici pourquoi enseigner les nombres ? C'est le premier point sur lequel je vais intervenir.

#### **Pourquoi enseigner les nombres ?**

Je dirais qu'on enseigne les nombres, (et plus tard des mathématiques plus complexes), parce que ça sert à répondre à des questions que l'on se pose sur le monde qui nous entoure, essentiellement, dans un premier temps, des questions qui portent sur des **grandeurs** : qu'est-ce qui est aussi grand que ? Quelle quantité restera-t-il si j'enlève ça ? Quelle quantité j'aurai si je partage en plusieurs parties ?.... Et les nombres, entiers tout d'abord, décimaux et rationnels ensuite, sont de prodigieux outils pour évaluer et prévoir la valeur de grandeurs, soumises à des manipulations : partages, réunions, ..., sans avoir à faire effectivement ces manipulations. Dans les lignes qui suivent nous allons tenter, dans un premier temps, de préciser ce que l'on entend par grandeur. Dans un second temps nous reviendrons sur la

mesure des grandeurs passant ainsi du monde matériel au monde mathématique, plus exactement numérique. Enfin nous reviendrons à des considérations plus didactiques.

## I - Qu'est-ce qu'une grandeur ?

*Quand on parle de grandeurs, on s'intéresse à des éléments du monde sensible :*

### *Nature d'une grandeur*

La notion de « grandeur » n'est pas simple à définir car elle renvoie à la prise en compte de données relevant du monde matériel, physique ou vivant, et fait intervenir des pratiques sociales en général implicites. Précisons :

- prise en compte de données pouvant être de nature très différentes : ainsi dira-t-on qu'il fait chaud ou froid dans une pièce, qu'une personne est plus ou moins aimable ou intelligente qu'une autre, qu'une valise est plus ou moins lourde qu'un sac, qu'un objet vendu est plus ou moins cher qu'un autre, qu'une distance est plus ou moins grande, qu'un chien est plus ou moins méchant que le mien, etc.
- chacune des assertions précédentes porte implicitement sur une grandeur dont la nature relève d'un consensus sociale. En effet prononcer de telles assertions suppose qu'on a la possibilité de se centrer sur une caractéristique ou un comportement d'un élément du monde qui nous entoure, (objet matériel, phénomène physique, comportement d'être vivant, ...), en négligeant les autres attributs de l'élément auquel on s'intéresse et en étant compris de la communauté à laquelle on s'adresse. Il ne nous vient généralement pas à l'idée de comparer à la fois la masse d'un objet, par exemple d'un légume, et la température qui est la sienne dans le magasin qui le vend, parce nous avons appris à construire deux grandeurs différentes « masse » et « température », associées à un même objet, deux **grandeurs** qui ne sont pas **de même nature** et qui interviennent pour accomplir des tâches différentes. Ces apprentissages ne relèvent pas, pour la plupart, d'activités à intention didactique mais se font par imprégnation, par ajustement à des pratiques sociales fonctionnelles pour accomplir certaines tâches : la température pour s'habiller plus ou moins chaudement, l'amabilité pour choisir ses fréquentations, ....
- chacune des assertions précédentes correspond à un jugement portant sur une grandeur d'une nature donnée. L'aptitude à porter un tel jugement suppose elle-même qu'on ait au préalable fréquenté des situations ou rencontré des phénomènes de même nature, possédant un caractère commun, afin de pouvoir comparer ce que l'on pourrait appeler, sur les exemples précédents, la température, l'amabilité, l'intelligence, la masse, le prix, la longueur, la méchanceté..., catégories que l'on désigne sous le terme de grandeurs. Si l'on s'intéresse à des grandeurs de même nature, par exemple la température de deux pièces, alors il devient souvent possible de les comparer, donc de dire si elles sont égales, différentes, et parfois, dans un tel cas, de dire que l'une est plus grande ou plus petite que l'autre. Une telle comparaison peut être obtenue soit de manière subjective, à travers la perception du chaud ou du froid qu'une personne éprouve, soit de manière plus objective – mais néanmoins entachée d'une certaine incertitude, comme tout procédé physique d'évaluation –, par exemple à partir de la

comparaison de la hauteur d'une colonne d'alcool dans un tube et de sa variation éventuelle d'une pièce à une autre.

On peut faire l'hypothèse que la construction de ce qu'est une **grandeur d'un type donné** se fait surtout dans des activités de comparaison de deux éléments relevant de cette grandeur où, par un effort d'abstraction, on est amené à sélectionner les caractéristiques pertinentes pour conclure.

Par exemple dans une situation impliquant des tas de pommes, on peut devoir comparer ces objets de multiples façons pour répondre à différentes questions que l'on peut se poser : on peut s'intéresser au volume occupé par chaque tas, au poids des fruits dans chaque tas, au volume de jus que chaque tas pourra produire et au prix qu'on pourra en retirer... Ces activités de comparaison peuvent être accomplies avec des techniques relevant du monde sensible : on loge les pommes de chaque tas dans des caisses identiques, on place chacun des tas sur un plateau d'une balance de type Roberval, on presse les pommes de chaque tas et on recueille le jus dans des récipients identiques...

*Dans chaque cas, on s'intéresse à une particularité des objets considérés, en faisant abstraction des autres, on ne se centre que sur une grandeur d'un type donné. Pour des particularités différentes on parle de grandeurs d'espèces différentes ou, dit autrement, de grandeurs de nature différente. Les manipulations que l'on accomplit pour comparer la « valeur » de cette particularité pour chacun des objets sont spécifiques de la particularité prise en compte, et s'effectuent dans le monde sensible : on compare les « valeurs » d'une grandeur d'une espèce donnée.*

Citons quelques techniques pour comparer, dans le monde sensible, les valeurs d'une grandeur d'une espèce donnée pour deux objets :

- *Comparer deux quantités* : on peut mettre côte à côte les éléments de deux collections pour comparer les quantités d'éléments de celles-ci ; ceci suppose, entre autre, que la personne (l'enfant) qui se livre à l'expérience réussisse certaines des tâches piagétienne de conservation des quantités, (quand on déplace une collection, ou quand on modifie l'organisation de celle-ci, la quantité d'éléments qui la compose ne varie pas)
- *Comparer deux longueurs* : on peut superposer deux baguettes en les faisant coïncider à une extrémité pour comparer leur longueur ; remarquons que, faisant cela, on postule que la grandeur « longueur » attachée à l'objet est invariante lorsqu'on déplace l'objet,
- *Comparer deux masses* : on peut utiliser une balance à deux plateaux pour comparer les masses de deux objets ; ce qui revient à admettre que la grandeur « masse », attachée à l'objet, ne varie pas lorsqu'on déplace l'objet (ce qui est faux en relativité restreinte pour un corps dans un référentiel donné se déplaçant à très grande vitesse relativement à un autre) ou tout au moins lorsque l'objet a été déplacé et se retrouve au repos,
- *Comparer deux aires* : on peut superposer, souvent après découpage, deux figures pour comparer leur aire ; ce qui présuppose aussi que la grandeur « aire », attachée à l'objet, est invariante lorsqu'on découpe l'objet et déplace les morceaux obtenus,
- *Comparer deux volumes* : on peut remplir un récipient de liquide et le transvaser dans un autre récipient pour comparer la contenance des deux récipients ; ce qui suppose

peut-être encore que la personne ait au préalable réussi des tâches piagétienne de conservation des quantités,

- *Comparer deux durées* : on peut utiliser un sablier pour comparer la durée de deux événements ; ce qui revient à admettre que le temps s'écoule de la même manière en deux lieux distincts de l'espace (ce qui est plus complexe en relativité que ce que le sens commun nous porte à croire).

On voit donc que les techniques de comparaison des grandeurs de même espèce s'appuient souvent sur des implicites non questionnés. Leur validité sociale tient en leur efficacité et à leur précision... jusqu'à un certain point. Ce qui signifie que cet implicite se construit à travers la fréquentation sociale de nombreuses situations du même type, reproduisant des expériences équivalentes dont les résultats engagent les personnes à concevoir une certaine régularité des résultats obtenus sous des conditions données. Néanmoins, on parvient à définir en mathématiques et de manière axiomatique, la notion de grandeur d'une espèce donnée, et on peut munir l'ensemble des grandeurs d'une espèce donnée d'une structure algébrique. Nous n'explicitons pas la théorie mathématique assez délicate qui découle de cette axiomatique, nous donnerons simplement ci-dessous, un aperçu de la construction des « opérations »<sup>1</sup> correspondantes.

*En maternelle et au C.P., la quantité est la première grandeur que l'on rencontre. S'intéresser à la **quantité d'éléments d'une collection**, (et bien avant de s'intéresser au « nombre d'éléments » de cette collection, donc à ce que l'on appellera plus tard son cardinal), nécessite, dans un premier temps, que l'on repère les particularités de cet objet « collection » pertinentes pour évaluer cette grandeur. Cela suppose, par exemple :*

- *que l'on soit en mesure d'identifier la collection comme un seul et même objet, constitué d'éléments, qui reste la même si on la déplace ou on modifie son organisation, en particulier si on veut comparer deux collections,*
- *que l'on néglige d'autres caractéristiques : la couleur, la forme, la taille, la place, ... des éléments qui la constituent.*

*C'est à travers de multiples tâches où la quantité d'éléments d'une collection est impliquée pour accomplir ces tâches, que l'on construit ce qu'on appelle grandeur d'une collection.*

*On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »<sup>2</sup> la description de situations d'apprentissage de la quantité. Il existe aussi des CD-Rom<sup>3</sup> présentant de telles situations, avec des commentaires pour les mettre en œuvre.*

*Objets ayant même grandeur, pour une grandeur de type donné*

Pour une grandeur d'une espèce donnée, il existe une multitude d'objets concrets qui sont équivalents au regard de cette grandeur : on imagine facilement qu'il existe des pommes ou

---

<sup>1</sup> Les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

<sup>2</sup> C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 1 à 3, p. 11 à 36.

<sup>3</sup> Apprentissages mathématiques en maternelle, J.Briand, M.Loubet, M.H.Salin, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

d'autres fruits ou objets qui ont la même masse. Le passage des deux objets sur une balance à deux plateaux permet à la fois de signifier à quelle espèce de grandeur on s'intéresse, la masse, et de comparer leur « valeur » pour cette espèce de grandeur. Ce que nous nommons la « valeur » ou la grandeur pour une espèce de grandeur d'un objet n'est pas un nombre, c'est une notion abstraite qui correspond, en quelque sorte, à la famille de tous les objets qui sont équivalents à celui-ci pour cette espèce de grandeur. Cette famille ne peut pas être appréhendée de façon exhaustive. Elle sera repérée par sa mesure, (quand une mesure de cette espèce de grandeur pourra être et sera définie), mais elle existe en dehors de sa mesure. Des manipulations spécifiques permettent de repérer les objets ayant même valeur ou même grandeur pour le type de grandeur auquel on s'intéresse, (quelques exemples ont été évoqués précédemment « *Comparer deux ...* ») ; ce sont des représentants de cette grandeur. Tous les objets équivalents pour une grandeur d'un type donné définissent une même grandeur pour ce type : une masse, une longueur, une quantité d'objets, ... Quand on s'intéresse à la quantité d'éléments d'une collection, tous les ensembles pouvant être mis en correspondance terme à terme ont une même valeur pour cette grandeur, que l'on appellera leur cardinal, chacun d'entre eux est un représentant de ce cardinal.

## II - Passage des grandeurs à leur mesure

### *On va passer ici du monde sensible au monde numérique*

*La construction des grandeurs décrite précédemment, celle de leur mesure que nous allons maintenant aborder, ne tiennent pas compte d'un quelconque contexte scolaire. Les élèves, quelque soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport à ces sujets. C'est à l'occasion d'activités que l'on pourra observer où ils en sont sur ce thème, et expliciter les connaissances mises en jeu souvent de façon implicite. De plus les élèves doivent à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Nous reviendrons plus loin sur ce problème.*

#### *Les grandeurs mesurables et les autres*

On a rappelé précédemment qu'on peut comparer les grandeurs d'une espèce donnée attachées à deux objets en utilisant des techniques de comparaison directe ou faisant intervenir des *objets intermédiaires* relevant du « monde matériel » qui permettent d'agir sur des représentants de ces grandeurs :

- si on veut comparer les longueurs de deux tiges courbes on pourra faire coïncider une *ficelle* avec l'une de ces tiges et l'appliquer sur la seconde,
- pour comparer l'aire de deux figures de formes très différentes on pourra *découper deux figures identiques à chacune d'elles* dans un carton épais et mettre chacun d'eux dans le plateau d'une balance.
- pour comparer, en début et en fin de saison, les quantités de têtes d'un troupeau, on peut créer une collection de cailloux de même grandeur que le troupeau en début de saison : on met un *caillou dans une boîte* pour chaque bête rentrant dans un enclos, et sortir un caillou de la boîte pour chaque bête sortant en fin de saison.

La ficelle, les figures en carton, la collection de cailloux sont des objets intermédiaires, permettant de garder en mémoire au cours d'un déplacement dans le temps ou dans l'espace, la valeur de grandeurs auxquelles on s'intéresse. On définit ainsi, pour des grandeurs d'une espèce donnée, une relation d'ordre entre ces grandeurs à partir de leurs représentants, de manipulations sur ces représentants, et cela ne dépend pas des représentants choisis : si deux collections ont la même quantité d'éléments, si une troisième collection a plus d'éléments que l'une d'elle, elle aura aussi plus d'éléments que l'autre. C'est bien une relation d'ordre entre grandeurs d'une espèce donnée qu'on définit ainsi, *relation d'ordre qui est totale*, (deux grandeurs d'une même espèce sont comparables).

Des techniques spécifiques à chaque espèce de grandeur peuvent aussi permettre de définir des « opérations » sur les grandeurs<sup>4</sup>, d'« additionner », de « soustraire » voire de « multiplier par un entier » des grandeurs de cette espèce par le biais de leurs représentants :

- on peut « additionner » deux longueurs en mettant bout à bout un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une longueur. Cette longueur ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, elle sera appelée « somme » des longueurs...
- on peut « additionner » deux aires en mettant côte à côte un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une aire qui, là aussi, ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, ...
- on peut « additionner » deux quantités : en faisant la réunion de deux ensembles représentant chacun l'une d'elles, disjoints l'un de l'autre, on obtient un représentant d'une quantité qui ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, appelé « somme » des deux quantités...

On imagine facilement, comment on pourra, (par le biais de représentants que l'on manipule), « soustraire », « multiplier par un entier », (par réitération d'« addition » d'une même grandeur), des longueurs, des aires ou des quantités,

On définit ainsi dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce des « opérations », comme pour les nombres !!! Nous verrons un peu plus loin que cette possibilité permet aussi, après avoir choisi une unité, de faire correspondre à chaque grandeur d'une même espèce, un nombre qui sera sa mesure. Dans cette correspondance la « somme » des grandeurs sera une grandeur dont la mesure sera la somme, (ici, somme de nombres), des mesures !!! La « soustraction » de deux grandeurs aura pour mesure la différence des mesures de ces grandeurs, de même pour le produit par un entier. Les grandeurs pour les quelles la construction d'une telle correspondance numérique est possible sont dites des **grandeurs mesurables**.

Mais la démarche qui consiste à définir une « addition » (et donc une « soustraction »), et une « multiplication » par un entier, n'est pas possible pour toutes les grandeurs.

---

<sup>4</sup> Comme nous l'avons dit plus haut, les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

Par exemple, considérons la grandeur « température ». En repérant la dilatation d'une colonne d'alcool dans un thermomètre placé dans deux pièces différentes, il est évidemment possible de comparer la température des deux pièces, et donc de dire si elles sont à la même température ou si l'une est à une température inférieure à l'autre, la référence à un même objet se dilatant à la chaleur permet de repérer la température de tout élément où cet objet peut être immergé, et ces températures peuvent être comparées sans que cette comparaison soit affectée par le choix fait des représentants. Les valeurs correspondant à la température peuvent ainsi être totalement ordonnées. Néanmoins si on ajoute ou soustrait deux températures, si on multiplie une température par un nombre on ne sait pas à quoi correspond le résultat dans le monde sensible. Si on a deux liquides de température différente, quelle sera la température de leur mélange ? On ne connaît pas de technique permettant de définir la « somme » de deux températures indépendamment des représentants choisis. On dit que la température est une **grandeur repérable** mais non mesurable. Il en est de même pour le temps, (mais les durées, elles, sont mesurables), pour l'altitude, (mais les dénivelés, eux, sont mesurables), ....

Notons que les différentes valeurs des grandeurs d'un type donné, qu'elles soient mesurable ou repérable, sont ordonnées : il est toujours possible de décider, de façon plus ou moins objective, par des manipulations spécifiques du type de grandeurs envisagées, sur des représentants de chacune d'entre elles, si elles sont égales ou quelle est la plus grande et quelle est la plus petite.

L'organisation du monde matériel que nous venons d'évoquer précédemment – à savoir le repérage sur les éléments auxquels on s'intéresse de particularités permettant de définir leur valeur comme grandeur d'un type donné, possibilité de mobiliser des représentants de cette même valeur, possibilité de comparer cet élément à des représentants d'autres valeurs pour le même type de grandeurs, possibilité de l'« additionner » ou la « soustraire », (sous certaines conditions), à une autre valeur du même type, possibilité de « multiplier par un entier » – prépare une modélisation numérique des grandeurs. C'est cette modélisation que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

### *Mesure de grandeurs d'un type mesurable*

Comme nous l'avons expliqué précédemment pour des grandeurs mesurables d'un type donné, on peut définir des « opérations ».

Dans le document « Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège, Grandeurs et mesures au collège »<sup>5</sup>, publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale, on trouve une illustration de telles constructions pour les longueurs :

*« Comparaison :*

*Elle se fait à l'aide de segments qui les représentent. Une longueur  $a$  est inférieure à une longueur  $b$  si leurs représentants  $[OA]$  et  $[OB]$  sur une même demi-droite d'origine  $O$  sont tels que  $A$  appartient à  $[OB]$ .*

*Addition :*

*La somme des longueurs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$  est celle du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments respectivement équivalents à  $[AB]$  et  $[CD]$ .*

---

<sup>5</sup> Ce document peut être téléchargé sur le site de l'Education Nationale, sous le titre « Grandeurs et mesures au collège ».

*Une fois définie l'addition des longueurs, on peut définir la multiplication des longueurs par un entier (addition itérée), le produit de la longueur  $a$  par l'entier naturel  $n$  étant noté  $n a$ .*

*Le problème de la division d'une longueur par un entier non nul est également abordé à l'école primaire par l'emploi du réseau de parallèles équidistantes (ou guide-âne). »*

Pour des grandeurs mesurables, la construction de la réponse à la question : « combien de fois un représentant d'une grandeur est-il contenu dans un autre de même espèce ? » nous introduit dans le monde numérique de la mesure des grandeurs. En effet : ***mesurer une grandeur consiste à associer à cette grandeur un nombre exprimant un rapport entre cette grandeur et une grandeur de même espèce prise comme référence, celle-ci est l'unité de mesure ; c'est-à-dire un nombre tel qu'en « multipliant » cette grandeur de référence par ce nombre, on obtienne la grandeur en question.***

Ainsi, dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure une collection  $\{c\}$  contenant un jeton, mesurer une collection  $C$ , c'est trouver le nombre par lequel il faut « multiplier » la collection  $\{c\}$  pour obtenir une collection de même quantité que la collection  $C$ , (c'est-à-dire combien de collections à un élément il faudra réunir pour obtenir une collection ayant la même quantité d'éléments que  $C$ ). C'est donc déterminer le nombre d'éléments de  $C$  !!! La mesure est ici toujours un entier.

La formulation adoptée « combien de fois », pourrait laisser penser que ce nombre est un entier, il n'en est rien.

On aura besoin des nombres décimaux : toujours dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure la collection  $\{a, a, a, a, a, a, a, a, a, a\}$ , la mesure de la collection  $\{b, b, b, b, b, b, b, b, b, b\}$  est obtenue en réunissant la collection de référence et une collection obtenue en « divisant » cette collection de référence par 10, elle sera 1,1.

On aura besoin des fractions non décimales : dans le domaine des longueurs, un guide-âne permet de « diviser » un segment  $S$  en 7 segments égaux, si je prends pour unité de mesure  $S$ , il faudra « multiplier »  $S$  par  $1/7$  pour obtenir un des petits segments. Mais l'ensemble des fractions ne suffit pas pour répondre à la question du produit d'une longueur par un nombre. On sait bien que pour les longueurs, par exemple, le rapport entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence est le nombre irrationnel  $\pi$  ; c'est à dire un nombre qui ne peut s'écrire sous la forme du quotient de deux entiers !!!

Deux remarques fondamentales :

- Ce qui vient d'être exposé montre que, si la définition des différentes valeurs d'une grandeur d'un type donné ne relève que du monde physique, le recours aux nombres, (munis de l'ordre et des quatre opérations), est incontournable pour définir une mesure et même pour définir certaines « opérations » dans l'ensemble de ces valeurs. L'intrication de ces trois notions – grandeurs, mesures, nombres – est une des principales difficultés pour introduire les nombres comme outil pour mesurer des grandeurs.

- Cette introduction des nombres est extrêmement précieuse, elle permet d'élaborer des techniques numériques pour accomplir des tâches de comparaison de grandeurs ; les opérations sur les nombres permettent de prévoir la mesure de grandeurs obtenues par manipulations d'objets de mesures connues : réunion, partage, ...sans que les manipulations soient nécessaires, loin des objets auxquelles elles s'appliquent, et même sans que ces objets existent réellement. Le recours aux nombres pour la mesure des grandeurs, réalise une simplification des techniques permettant comparaison, « addition » et « produit » d'une grandeur par un nombre. Par cette opération de mesure, on passe de manipulations effectives dans le monde sensible à des manipulations dans le monde mathématique ou plus exactement numérique en attachant un nombre à une grandeur<sup>6</sup>. Ainsi, par exemple, on saura que si on commande 100 madeleines pour une classe de 23 élèves, il n'y en aura pas une pour chaque élève, chaque jour, durant une semaine de 5 jours, il faudra prévoir une commande plus importante si on veut donner une madeleine à chacun, chaque jour.... Les nombres et les calculs sur les nombres permettent de prévoir en l'absence des objets avec lesquels on travaille.

Néanmoins, il faut garder présent à l'esprit qu'une grandeur ne se réduit pas à sa mesure, donc ne se réduit pas à un nombre ; ce que le recours aux nombres pour les mesures des grandeurs incite souvent à oublier<sup>7</sup>.

### III – Les nombres et les grandeurs : quelques considérations didactiques

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les grandeurs et leurs mesures comme si la connaissance des nombres, et des opérations sur les nombres, les précédaient. D'un point de vue épistémologique tel n'est pas le cas et, à l'école élémentaire, on se servira des grandeurs et de leurs mesures pour construire les ensembles de nombres, et munir ces ensembles des structures utiles pour « calculer » sur les grandeurs. Les élèves vont à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Les interactions entre ces différentes connaissances ne doivent pas faire oublier que les objets auxquels elles se rattachent ne sont pas de même nature et que la différenciation s'impose.

#### *Construction de la quantité*

Dès le début de la scolarité les enfants vont construire une grandeur particulière : la quantité attachée aux collections.

<sup>6</sup> Notre texte présente très succinctement la construction des grandeurs puis de leur mesure en partant de manipulations dans le monde sensible et en supposant les nombres dont on a besoin disponibles....

Pour une construction plus précise et plus rigoureuse d'une théorie des grandeurs et de leur articulation avec les nombres, on pourra se référer à un des documents cités ci-dessous, les éléments évoqués dans notre texte constituant néanmoins un début d'environnement technologique pour une telle construction :

- « Ressources pour les classes de 6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, et 3<sup>e</sup> du collège, *Grandeurs et mesures au collège* » publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale et précédemment cité.

- Chevallard Y., Bosch M., 2000, Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I, Une Atlantide oubliée. *Petit x*, n° 55, pp. 5-32.

- Chevallard Y. Bosch M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II, Mathématisations. *Petit x*, n° 59, pp. 43-76.

- Rouche N., 2006, *Du quotidien aux mathématiques, nombres, grandeurs, proportions*, édition Ellipse.

<sup>7</sup> Ce que rappelle M-J. Perrin-Glorian in « Actes de la XI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques » p. 303 : « Cependant, pour l'apprentissage, il est important de considérer les grandeurs d'un point de vue non numérique ».

C'est à travers de multiples tâches impliquant la quantité d'éléments d'une collection, que l'on construit cette grandeur. Comme nous le disions plus haut, « les élèves, quelque soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport aux nombres et aux grandeurs ».

La construction de la quantité passe par de multiples activités conduisant à la comparaison directe de collections puis à la comparaison de collections à l'aide de collections intermédiaires<sup>8</sup>.

La majeure partie des enfants connaissent une suite de mots-nombres, qu'ils ont appris souvent en dehors de l'école, énonçant avec quelques fois des oublis, des redites, les nombres à partir de un et pouvant aller très loin... Ils utiliseront la suite de mots-nombres comme collection intermédiaire pour comparer deux collections éloignées l'une de l'autre, pour construire, de façon différée, une collection ayant la même quantité d'objets qu'une collection qu'ils n'ont plus à leur disposition. Mais cela ne signifie pas que le dernier nombre énoncé est ce qu'on appellera le « nombre » d'éléments de la collection, son cardinal. La file numérique égrenée jusqu'à un certain nombre n'est qu'une collection transportable, qui peut voyager dans le temps et dans l'espace, (au même titre que les doigts des deux mains ou qu'un croquis représentant, par des croix, les éléments de la collection sur laquelle on travaille), que l'on peut mettre en correspondance terme à terme, (en pointant du doigt un élément tout en énonçant un nombre de la file), avec les collections auxquelles on s'intéresse. Pour que ce mot puisse représenter la quantité d'éléments de la collection, il faudra que cette suite de mots-nombres soit invariable afin de rendre les comparaisons fiables<sup>9</sup>. Si, suivant les situations, l'ordre ou les mots énoncés ne sont pas les mêmes, le dernier mot énoncé ne correspondra pas à des collections de même valeur, elle ne sera pas un étalon fiable. Dans le cas contraire toutes les collections de même valeur pourront être mises en correspondance terme à terme avec les mots de la file numérique énoncée jusqu'au même mot, lequel pourra caractériser cette valeur.

### ***Construction des entiers naturels***

Lorsqu'un élément de la file numérique est utilisé pour caractériser une quantité, il change de statut, il devient le nom d'une famille de collections, il devient le cardinal d'un quelconque représentant de cette quantité, il devient un entier naturel. Chaque nombre acquiert une existence propre en dehors de son appartenance à la suite de mot-nombre, une fonctionnalité : il désigne une grandeur particulière, la quantité dont un représentant, en quelque sorte emblématique, est la collection des mots-nombre énoncés dans la file numérique jusqu'à lui. Dans l'expression « cette collection possède  $n$  éléments »,  $n$  est le cardinal de la collection, c'est un élément de l'ensemble des cardinaux ou de l'ensemble des entiers naturels.

*Il est certainement important de faire apparaître la différence de statut entre un nombre inséré dans la file numérique et ce même nombre cardinal d'une collection.*

---

<sup>8</sup> On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la quantité, à l'ouvrage déjà cité : C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 1 à 3, p. 11 à 36, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : Apprentissages mathématiques en maternelle, J.Briand, M.Loubet, M.H.Salin, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

<sup>9</sup> Voir C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 4, p. 36 à 41.

C'est en s'appuyant sur cette genèse que l'on va pouvoir munir l'ensemble des entiers naturels de structures algébriques, (ordre et opérations).

La suite de mots-nombres, apprise comme une comptine, est ordonnée, et à ce titre va servir de support pour *ordonner les nombres* c'est à dire définir sur l'ensemble des nombres entiers une relation d'ordre totale<sup>10</sup>. L'assertion le nombre  $n$  est plus petit que le nombre  $p$ , va se construire dans deux types de situations :

- des *situations liées à la construction de la quantité* : quand une collection ayant  $n$  éléments a moins d'éléments que celle qui a  $p$  éléments, (par correspondance terme à terme), on dira que  $n$  est plus petit que  $p$ , (et cela ne dépend pas des collections à  $n$  et  $p$  éléments choisies). Ici le nombre est considéré comme la mémoire d'une quantité,
- des *situations liées à la position*. Les nombres ne sont pas uniquement liés à la quantité mais aussi au repérage de la position d'un objet dans une collection rangée en ligne et, là encore, comme pour la construction de la quantité, on s'appuie sur la suite des mots-nombres pour construire la notion de position. Dans une collection rangée en ligne, (cela signifie qu'il y a un objet qui est « avant » tout les autres et qu'on peut parcourir la collection en allant, à partir de celui-ci de gauche à droite ou de haut en bas), si on s'intéresse à un objet particulier, le dernier mot-nombre énoncé quand on pointe l'objet désigné après avoir pointé tous ceux qui sont avant (en correspondance terme à terme avec la suite de mots-nombres), permet de garder en mémoire la position de cet objet. S'il désigne le cardinal de la collection qu'il constitue avec tous les objets qui sont avant lui, il désigne aussi la position de cet objet par rapport à un objet de départ, cet entier est alors un ordinal, (remarquons que la relation entre le rôle cardinal et le rôle ordinal d'un même entier doit être étudiée). Nous intéressant surtout ici aux grandeurs et à leurs mesures, nous ne détaillerons pas plus la construction de la notion de position. On pourra se référer aux ouvrages déjà cités précédemment pour trouver des activités sur ce sujet<sup>11</sup>. Si l'objet situé en position  $n$  est avant l'objet situé en position  $p$ , si la collection des mots-nombres jusqu'à  $n$  a moins d'éléments que la collection des mots-nombres jusqu'à  $p$ , on dira que  $n$  est plus petit que  $p$ . Notons que cette façon de construire les entiers permet de parler de successeur d'un entier, (le successeur de  $n$  n'est pas encore  $n+1$  !).

### **Mesure des quantités. Opérations sur les entiers**

La construction de la mesure de la quantité commence implicitement lorsque la suite de mots-nombres, stabilisée, va être utilisée de la manière suivante pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection : « un et encore un ça fait deux et encore un ça fait trois, ... ». Dans le « projet de programme et recommandations école maternelle » de 2014<sup>12</sup>, on parle

<sup>10</sup> Une relation d'ordre totale dans un ensemble est une relation permettant de comparer deux éléments quelconques de cet ensemble, de décider quel est le plus grand et le plus petit des deux, en sachant que, si un élément est à la fois plus grand et plus petit qu'un autre, alors c'est qu'ils sont égaux, enfin telle que si un élément est plus petit qu'un autre, lui-même plus petit qu'un troisième alors le premier est plus petit que le troisième.

<sup>11</sup> On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la position, à l'ouvrage déjà cité : C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 3, p. 59 à 74, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : Apprentissages mathématiques en maternelle, J.Briand, M.Loubet, M.H.Salin, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

<sup>12</sup> Site internet consulté le 01/09/2014 : [http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-\\_Projet\\_de\\_programme-recommandations\\_337324.pdf](http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf)

d'« itération de l'unité ». Les gestes qui accompagnent ce discours correspondent à des réunions successives d'un ensemble avec un ensemble à un élément, le discours, lui, peut être entendu comme des « additions » successives de collections à un élément. Une unité est choisie et on la reporte.

Pour permettre la mesure des quantités, les entiers naturels doivent être munis d'opérations.

*L'addition dans les nombres entiers doit être une opération (au sens : à deux nombres on fait correspondre un troisième), cohérente avec la réunion des collections disjointes, (au sens : à deux nombres représentant deux quantités, (donc cardinal de ces deux quantités), on fait correspondre un nombre qui représentera la « somme » de ces deux quantités). Pour la définir on « transporte » en quelque sorte la réunion de collections. C'est « ça » que l'on appelle addition dans notre société.*

En général, pour débiter l'étude de l'addition de deux entiers, on introduit le signe + dans des locutions verbales, utilisant des nombres, et qui gardent en mémoire la quantité d'objets de collections obtenues par réunion de deux collections dont on connaît les cardinaux. Dans un problème du type : « je sais que dans une section il y a 12 enfants dans l'autre il y a 15 enfants, si je veux réunir ces deux sections dans la salle de spectacle est-ce que j'aurai assez de chaises pour tous ? Il me faut 12 et encore 15 chaises, je vais noter ceci  $12 + 15$  pour m'en souvenir temps que je n'ai pas accès à la salle ». Cette expression représente un nombre entier, puisque c'est le cardinal de la collection obtenue par réunion des deux sections, mais ce n'est pas encore un nombre entier ! Cette locution verbale permet toutefois de résoudre le problème de place, dès qu'on est dans la salle et avant que les enfants arrivent !

Pour construire l'addition il faudra décider quel est le troisième entier que l'on fait correspondre à deux entiers  $n$  et  $p$ , et que l'on appellera somme de  $n$  et de  $p$  : ce sera naturellement le cardinal de la collection obtenue par réunion d'une collection de  $n$  et d'une collection à  $p$  éléments. Avec de petits nombres d'abord, des collections disjointes, respectivement à  $n$  et  $p$  éléments étant données, on détermine par dénombrement direct le nombre d'éléments de la réunion. On décide alors que la somme de  $n$  et de  $p$ , aussi notée  $n + p$ , est cet entier. A ce niveau, on ne pose pas le problème de savoir si le résultat est indépendant du choix des collections à  $n$  et  $p$  éléments choisies, mais c'est évidemment le cas !!!

*Il est certainement important d'insister sur le fait qu'on construit ainsi une opération sur les nombres : à deux entiers  $n$  et  $p$  on fait correspondre l'entier qui est le nombre d'éléments de la réunion d'une collection à  $n$  éléments et d'une collection à  $p$  éléments.*

*On aurait pu construire l'addition en utilisant la genèse ordinale des entiers : je suis sur la case  $n$  et j'avance de  $p$  cases, on décide que la somme de  $n$  et de  $p$ , notée  $n + p$ , sera le numéro de la case où je me trouve.*

*Quelque soit le type de situation utilisée pour construire l'addition – réunion de collections ou déplacement sur une file – le lien avec l'autre définition doit être travaillé, afin que dénombrement de réunion de collections et déplacement sur la file numérique deviennent des techniques alternatives, équivalentes, pour déterminer la somme de deux entiers.*

Très vite on peut remplir une table d'addition 9 x 9 en remarquant que  $n + p = p + n$ , (issu de la propriété de la réunion), qu'ajouter 1 à un entier revient à prendre son successeur, (propriété issue de la définition ordinale des entiers), ...

Mais le dénombrement des collections, réunion de deux collections, ou de grands déplacements sur la file numérique, deviennent très vite difficiles et peu fiables. La poursuite de la construction de l'addition ou la conduite d'activités conduisant au dénombrement de grandes collections peuvent être l'occasion de travailler sur le système de numération qui est le notre. On sera amené à organiser les collections pour rendre fiable et simplifier le dénombrement et à s'appuyer sur les régularités de l'écriture chiffrée des nombres pour les grands déplacements sur la file numérique.

*Les activités de dénombrement, que ce soit pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection ou celle de la réunion de plusieurs collections, nécessitent une technique fiable d'énumération de ces éléments. On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »<sup>13</sup> des activités pour enseigner l'énumération.*

### **Système de numération**

Nous l'avons vu précédemment, chaque nombre est un signe pour désigner une quantité. Les écritures utilisées pour désigner une quantité relèvent de conventions sociales, ils constituent des systèmes de numération. Ces signes sont écrits et oralisés pour faciliter la communication des informations qu'ils représentent, ils deviennent des mots. Les règles de formation d'un système de numération écrit et du système de numération orale qui lui correspond ne sont pas nécessairement les mêmes, ce qui n'est pas sans poser de problèmes didactiques. On y reviendra plus loin et on pourra se reporter, à ce sujet, à l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »<sup>14</sup>. Nous nous centrons d'abord sur le système de numération écrit dont l'algorithme de construction permet de justifier l'algorithme de comparaison des grands nombres et les algorithmes des quatre opérations.

Un *système de numération* est constitué d'un ensemble S de symboles permettant d'écrire les entiers naturels sous forme de chaînes de ces symboles obéissant à des règles de constitution. Un système de numération sera d'autant plus intéressant :

- (a) que le nombre de signes utilisés est faible,
- (b) que chaque nombre est représenté par une chaîne de symboles qui n'est pas trop longue, (les noms des différentes quantités est court),
- (c) qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la désignation des nombres,
- (d) que les techniques élémentaires de calcul (pour comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser) sont économiques, puissantes et fiables.

Les systèmes de numération ont évolué au cours des siècles<sup>15</sup>. Avant d'arriver à notre système de numération, ils ont subi plusieurs améliorations :

---

<sup>13</sup> C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 4, p. 75 à 96.

<sup>14</sup> C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 5, p. 97 à 114.

<sup>15</sup> On pourra se référer à l'ouvrage :



à l'oral, pour tous l'écriture chiffrée des nombres relève d'un apprentissage scolaire qui permettra d'en découvrir les règles. Pour la construction de la quantité, on recourt en général à l'apprentissage d'une liste de mots-nombres avec comme support visuel une file numérique sur laquelle figure l'écriture chiffrée des mots utilisés, ce matériel peut être utile comme collection intermédiaire dans les dénombrements, mais de plus les écritures chiffrées qui sont associées aux mots-nombres, porte la trace des règles de l'algorithme de notre numération et font apparaître des régularités.

C'est à l'occasion de dénombrements que l'attention peut être attirée sur ces régularités, en particulier en utilisant du matériel de représentation de la collection organisée en « paquets » : usage des doigts des deux mains, de dés, de matériel Diènes, de cartes à points, de boîtes de Picbille, de bouliers, de la Pascaline. On va ainsi passer, en s'appuyant sur ce qui est écrit sur la file numérique, de 1 et encore 1 ça fait 2... à 5 et encore 5 ça fait 10 et encore 1 ça fait 11, ou à un paquet de 10 et encore un ça fait 11. En fait, avec chaque matériel utilisé *on mesure les quantités qui nous intéressent avec une unité spécifique au matériel* : on mesure en doigts d'une main, en demi-boîtes de Picbille ou en constellations à cinq points, on mesure en paquets de 10 avec les barres Diènes, les boîtes de Picbille, les bouliers, (à dix boules), ou la Pascaline. Dans ce deuxième cas, on apprendra que, quand on a la même quantité d'objets que de carrés sur une barre, que de boules sur une ligne de boulier (pleine, que de « clics » avec la roue de droite sur la Pascaline ou que la boîte de Picbille est pleine, on écrira 10 (1 à gauche et 0 à droite), la quantité d'objets, ce qui signifie « 1 barre, une ligne, une boîte, ... complète et rien d'autre, qu'on écrit 0 derrière ». Si on rajoute un objet, on aura toujours une barre, une ligne, ... complète et encore 1, on écrira 11 la quantité d'objets. Il est fondamental que les deux 1 apparaissent, en vertu de leur place, avec des valeurs différentes, ils mesurent des quantités avec deux unités différentes.

On débute ainsi la mise en place de l'algorithme de l'écriture chiffrée des nombres entiers, un outil fondamental pour dénombrer de grandes collections, incontournable pour calculer le nombre d'éléments de la réunion de deux collections ...

*On voit que le parcours décrit précédemment et qui n'est que le début de l'épopée des nombres à l'école, n'est pas linéaire. Il en est de même si on pense à l'histoire des nombres – G. Ifrah<sup>17</sup> parle d'une « épopée de plusieurs millénaires », nos chiffres, les chiffres dits arabes, seraient sans doute nés en Inde, il y a près de 15 siècles – les avancées sont variables suivant les civilisations, elles n'émergent que si elles répondent à des demandes sociales après avoir été conçues par les savants : « la logique n'est pas le fil conducteur de cette histoire ».*

*Dans les lignes qui précédent nous avons commencé par la construction des grandeurs, parmi celles-ci, les quantités ont permis de définir ce que l'on appelle les nombres entiers naturels, ils ont émergé pour nommer les différentes valeurs des quantités, toujours dans une perspective de mémorisation ou de transmission.*

---

<sup>17</sup> G. Ifrah, (1994), *Histoire universelle des chiffres. L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris, éd Robert Lafont. Toutes les citations qui suivent dans ce paragraphe sont extraites de cet ouvrage.

*Pour ces objets mathématiques, de nombreux modes de représentations ont été utilisés. On peut situer au IV<sup>e</sup> millénaire avant J.C. l'usage de représentations à l'aide d'objets en argile ayant des formes différentes suivant l'unité qu'ils représentent, cela dans un mélange de systèmes à base 10 et à base 60. L'apparition de l'écriture alphabétique du langage oral correspond à l'utilisation des lettres pour écrire les nombres, mais « la découverte de la numération de position a échappé à la majorité des peuples de l'histoire ». Une règle d'écriture de ce type n'est apparue que quatre fois : chez les savants de Babylone, au II<sup>e</sup> millénaire avant notre ère, chez les mathématiciens chinois, peu avant le début de l'ère chrétienne, chez les astronomes maya entre le III<sup>e</sup> et le V<sup>e</sup> siècle après J.C. et enfin chez les mathématiciens indiens au V<sup>e</sup> siècle. Seul ce dernier peuple envisagea le zéro comme un chiffre et cette numération nous fut transmise par les arabes. L'écriture chiffrée que nous utilisons, est d'une part décimale, ce qui conduit à mesurer les quantités avec des unités différentes, toutes puissances de 10 : 10, 100, 1000, ... d'autre part de position, ce qui permet de ne pas avoir à mobiliser un signe différent pour chaque puissance de 10, la position dans l'écriture chiffrée du nombre indique la puissance dont il est question. Il est important de faire apparaître la capacité illimitée de notre représentation : « en usant d'un nombre très réduit de chiffres de base celle-ci permet en effet, sans aucun artifice, une représentation simple et parfaitement rationnelle de n'importe quel nombre aussi grand soit-il. ». Il est aussi important de montrer « la parfaite adaptation à la pratique, par écrit des opérations arithmétiques », que d'autre système de numération rendent difficiles voire impossibles.*