Arbres

Malika More
(malika.more@u-clermont1.fr)

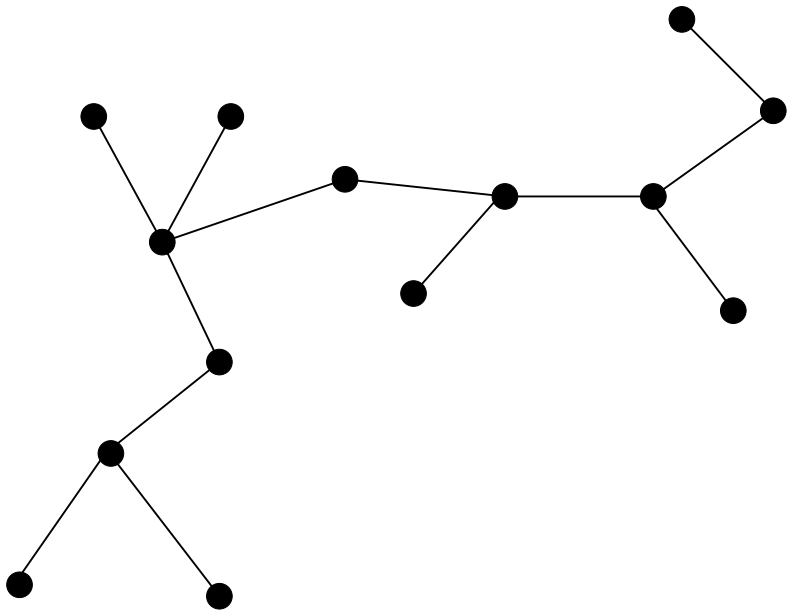
IREM Clermont-Ferrand

Formation ISN

20 octobre 2011

Définition

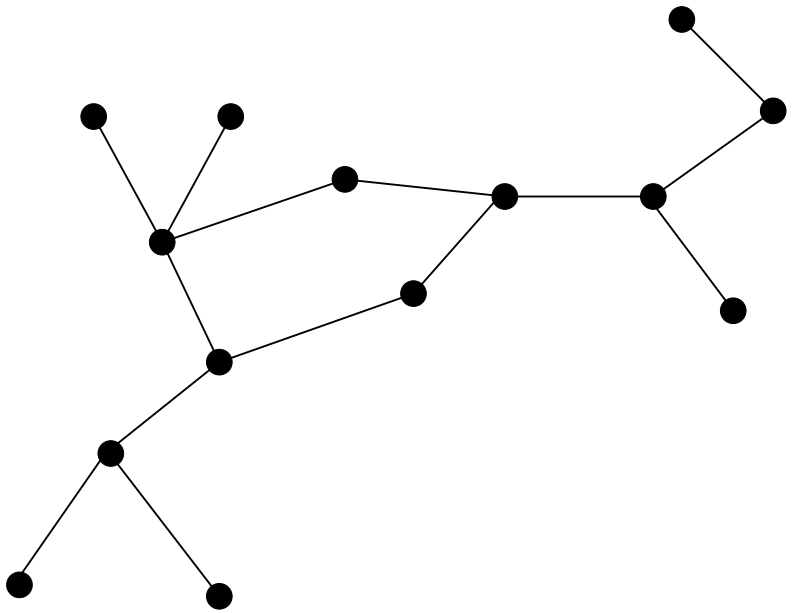
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



arbre

Définition

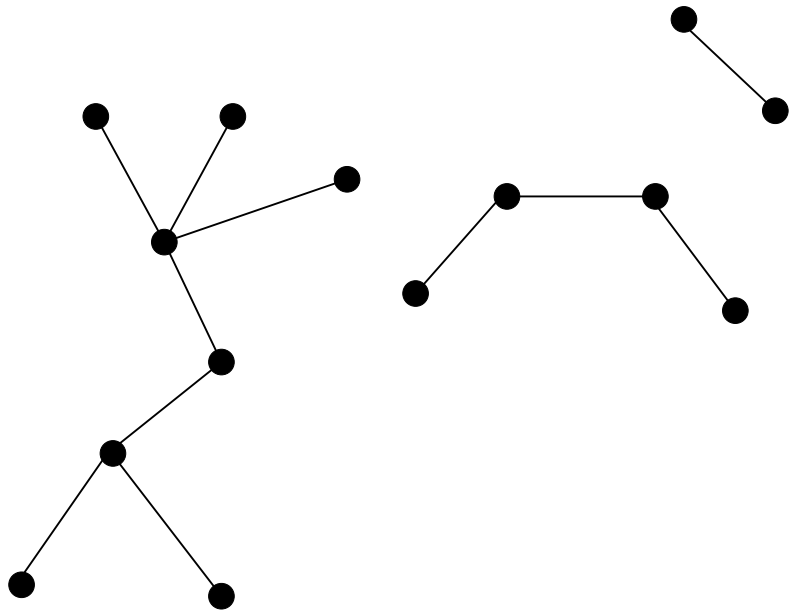
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



{ connexe, avec cycle(s) } pas arbre

Définition

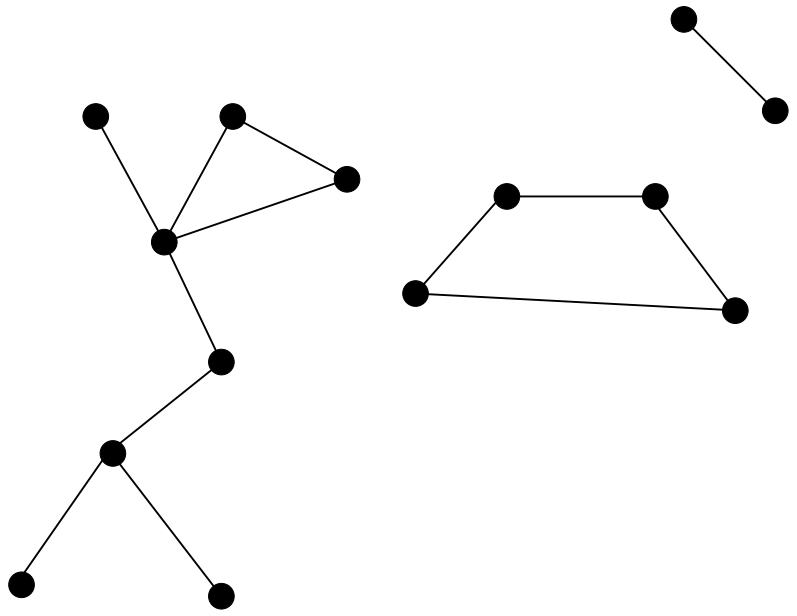
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



{ non connexe, sans cycle } ... plusieurs arbres ... forêt

Définition

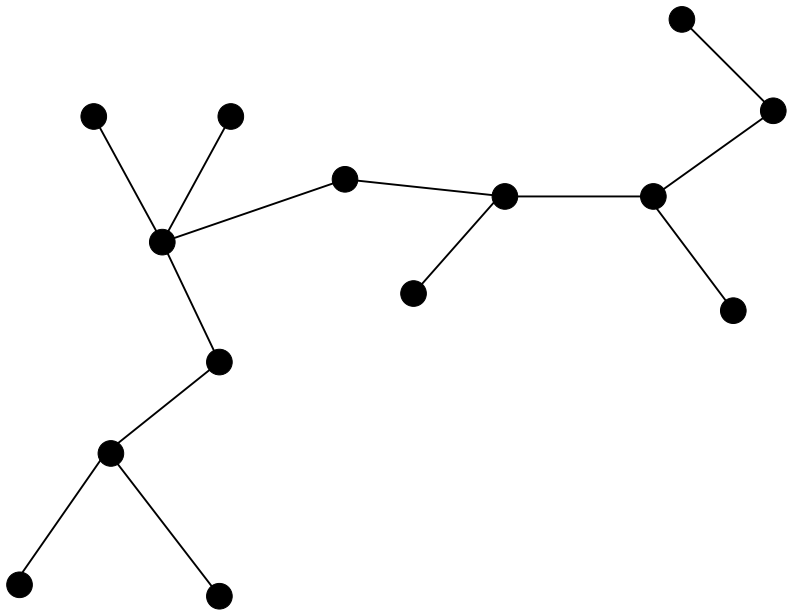
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



{ non connexe, avec cycle(s) } pas arbre

Définition

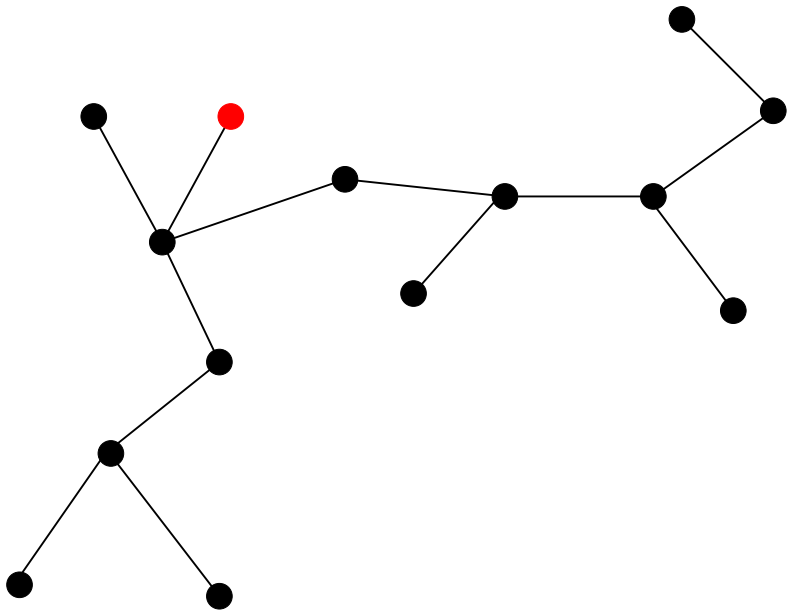
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



arbre

Définition

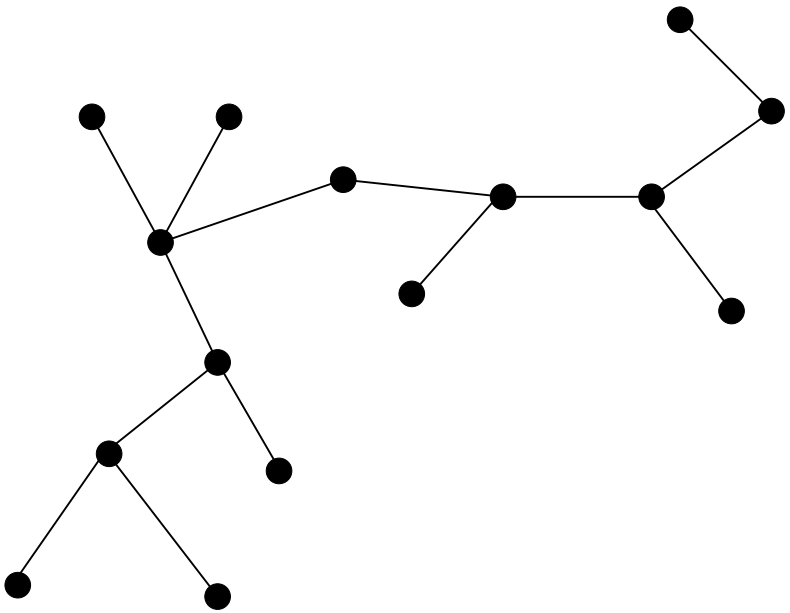
graphe non orienté { connexe, sans cycle } arbre *T (tree)*



sommet de degré 1 ... au bout d'une branche ... feuille

Construction

- Un graphe avec un seul sommet et zéro arête est un arbre



- À partir d'un arbre avec au moins 1 sommet
- On accroche une feuille n'importe où
- On obtient un arbre avec un sommet et une arête de plus

Mise en oeuvre

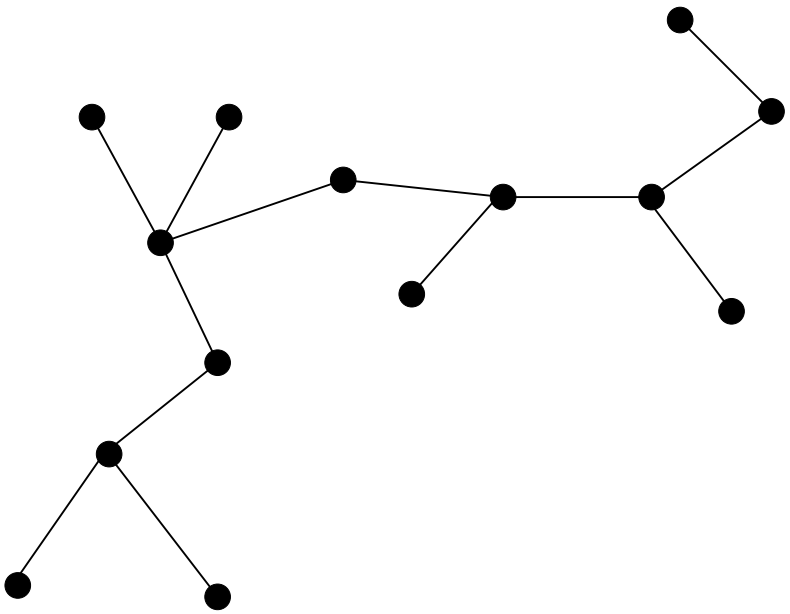
Exercice

1. Trouvez tous les arbres à 4 sommets à isomorphisme près.
2. Trouvez tous les arbres à 5 sommets à isomorphisme près.

Remarque

1. Un arbre à n sommets possède exactement $n - 1$ arêtes.
2. Un arbre avec au moins deux sommets a forcément au moins une feuille.

Propriétés caractéristiques

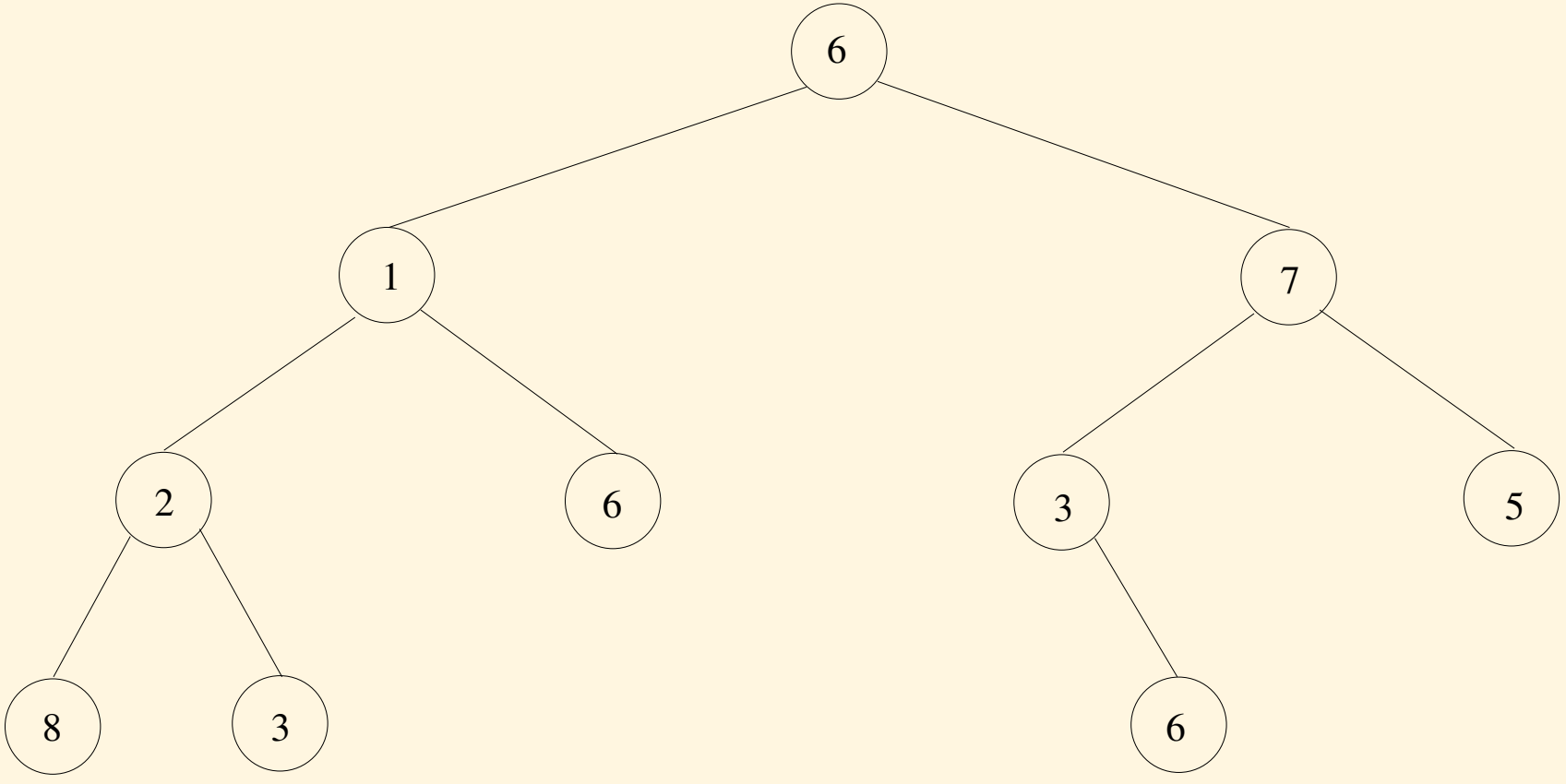


1. deux sommets quelconques d'un arbre sont reliés par une unique chaîne
2. enlever une arête quelconque à un arbre le déconnecte
3. ajouter une arête quelconque à un arbre crée un cycle

Un graphe ayant ces propriétés est forcément un arbre.

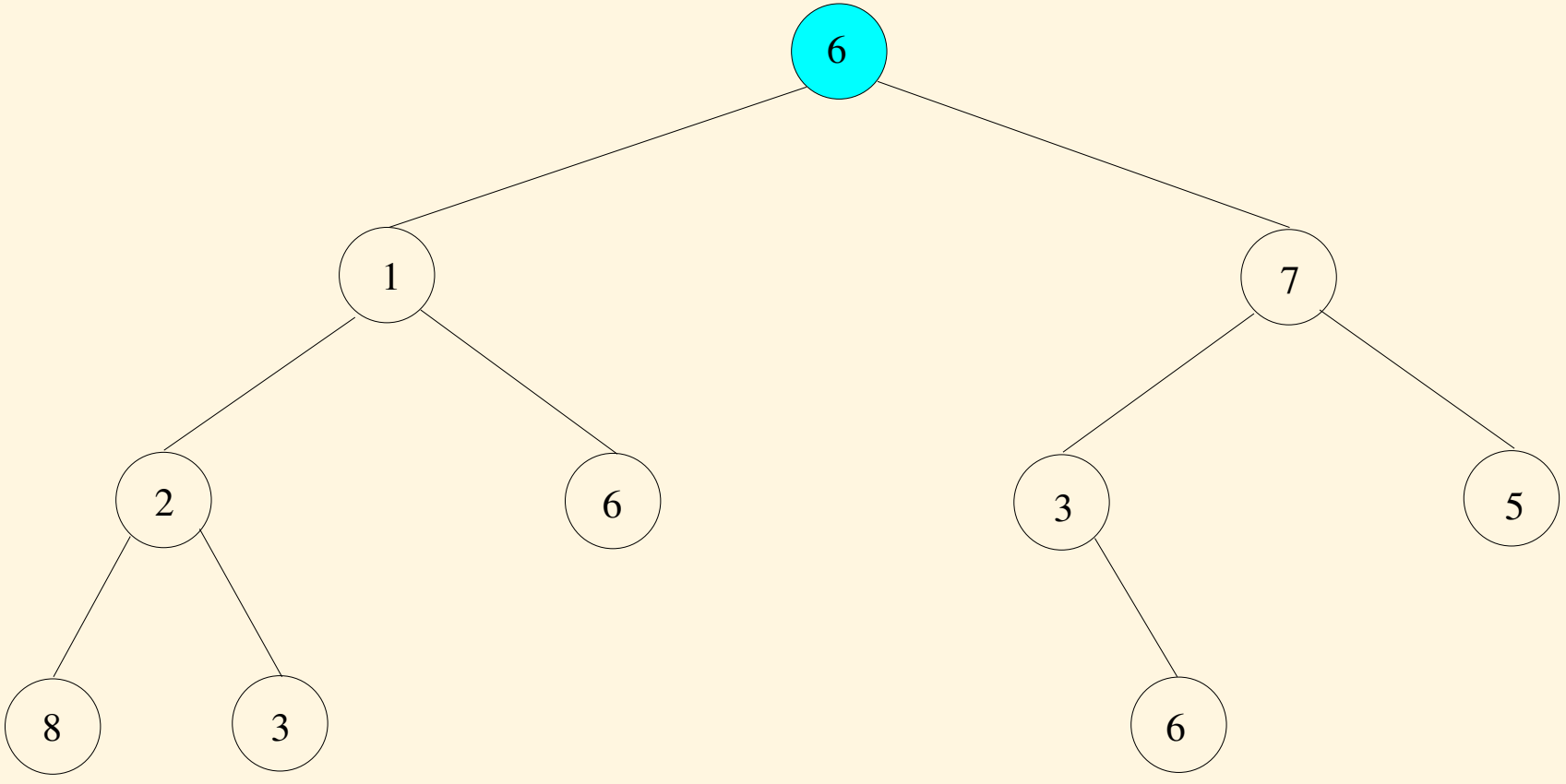
Arbre enraciné

Arbre



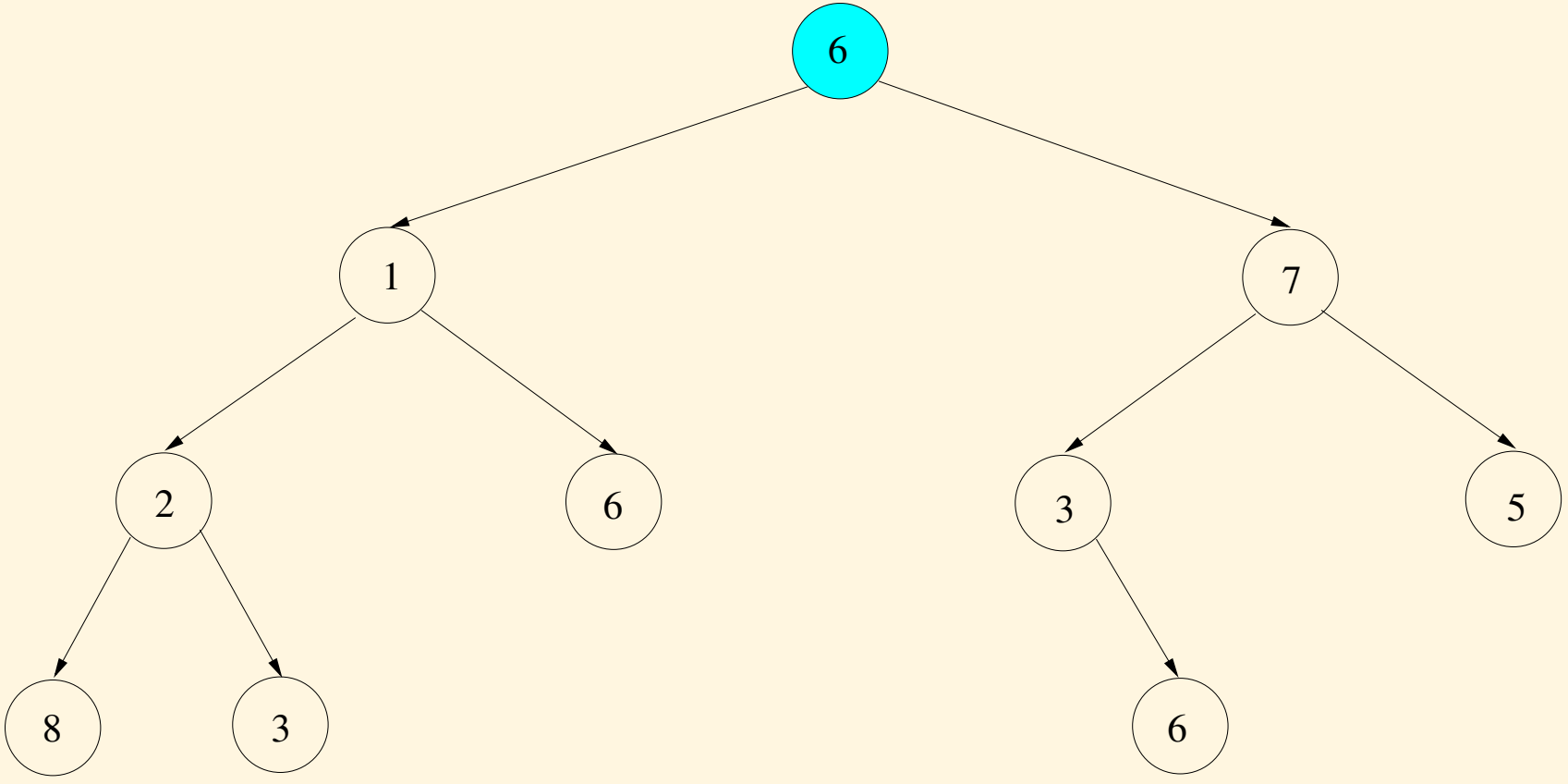
Arbre enraciné

Racine



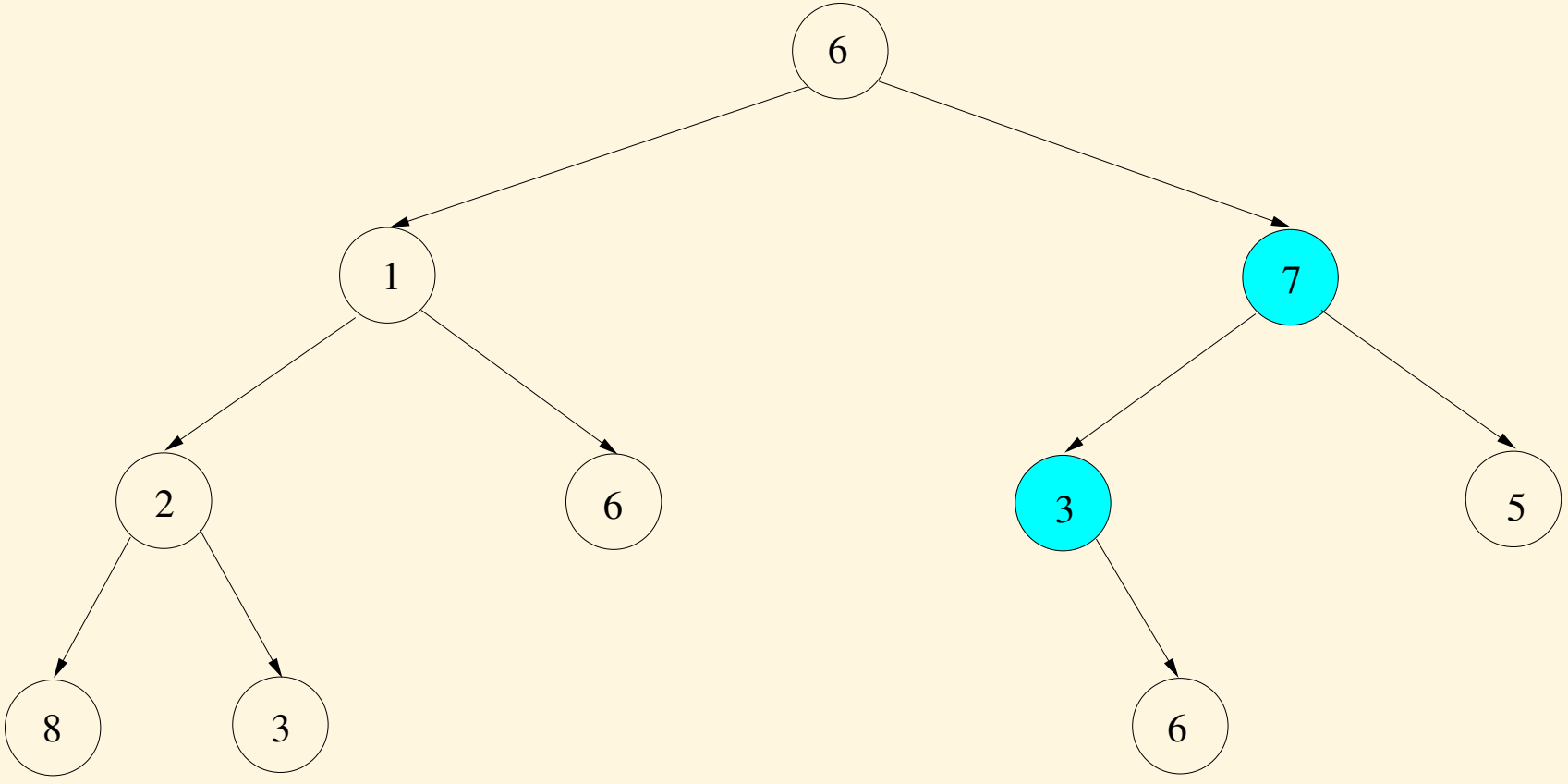
Arbre enraciné

Orientation



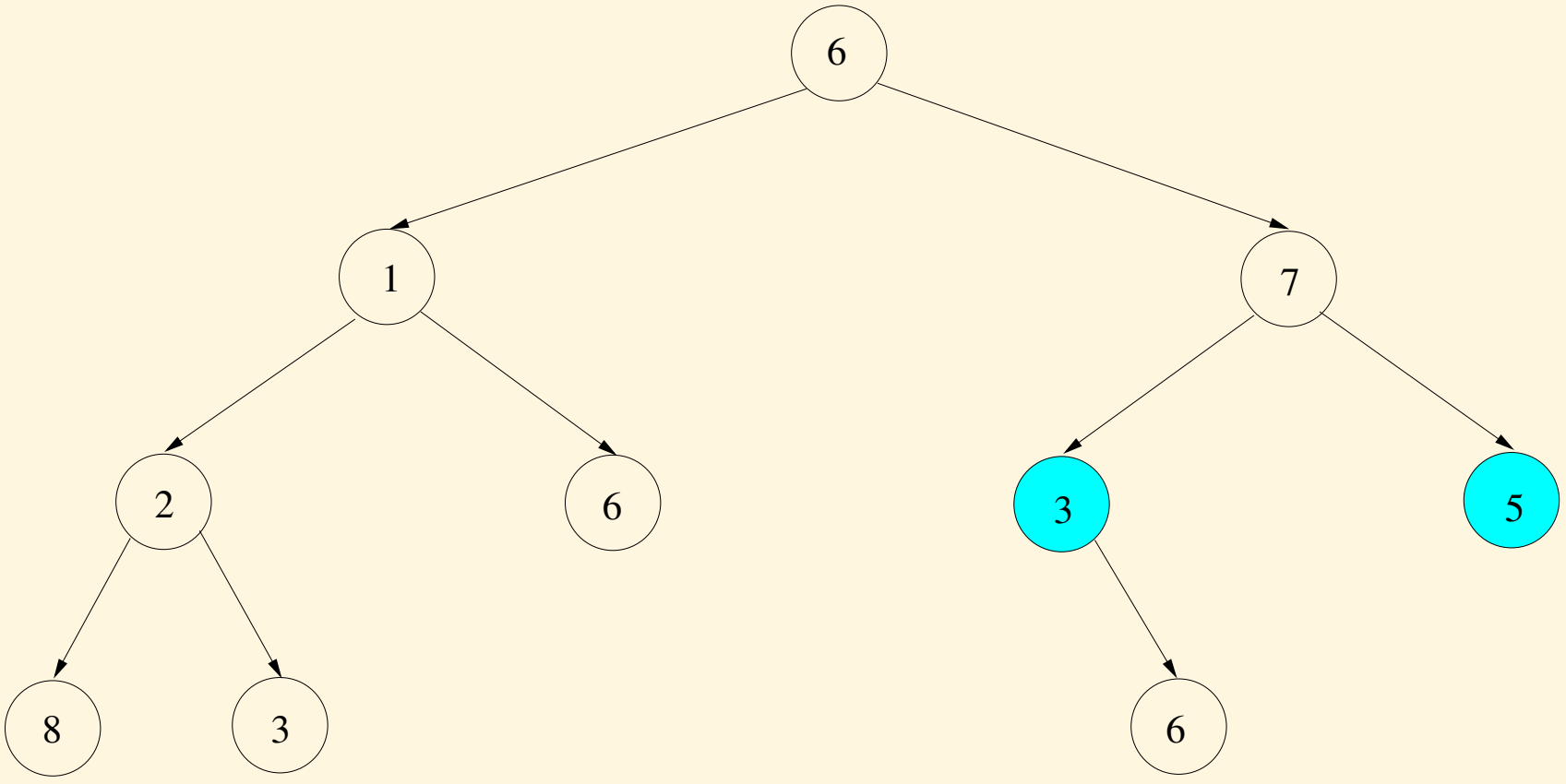
Arbre enraciné

Père et fils



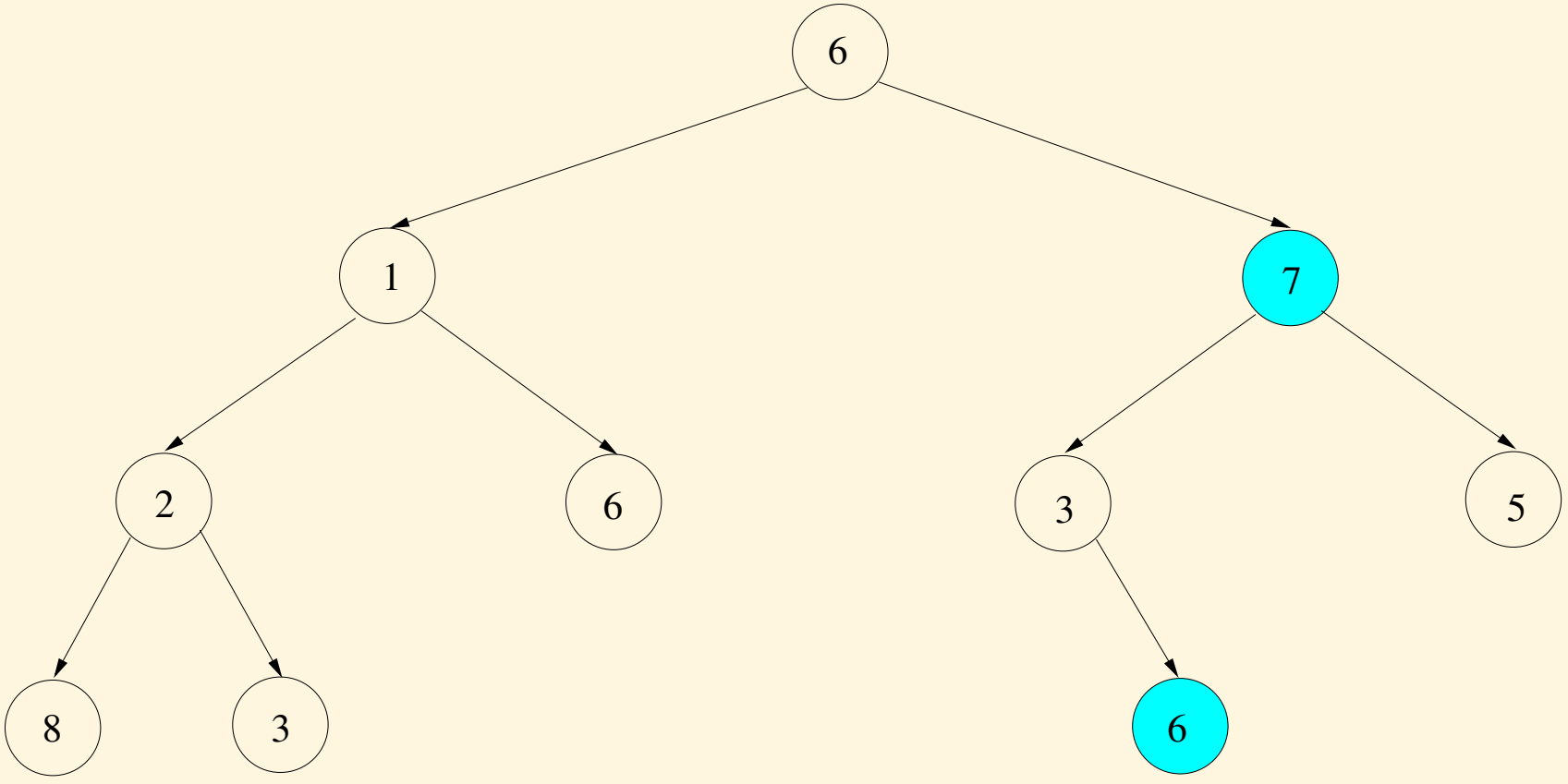
Arbre enraciné

Fils droit / Fils gauche



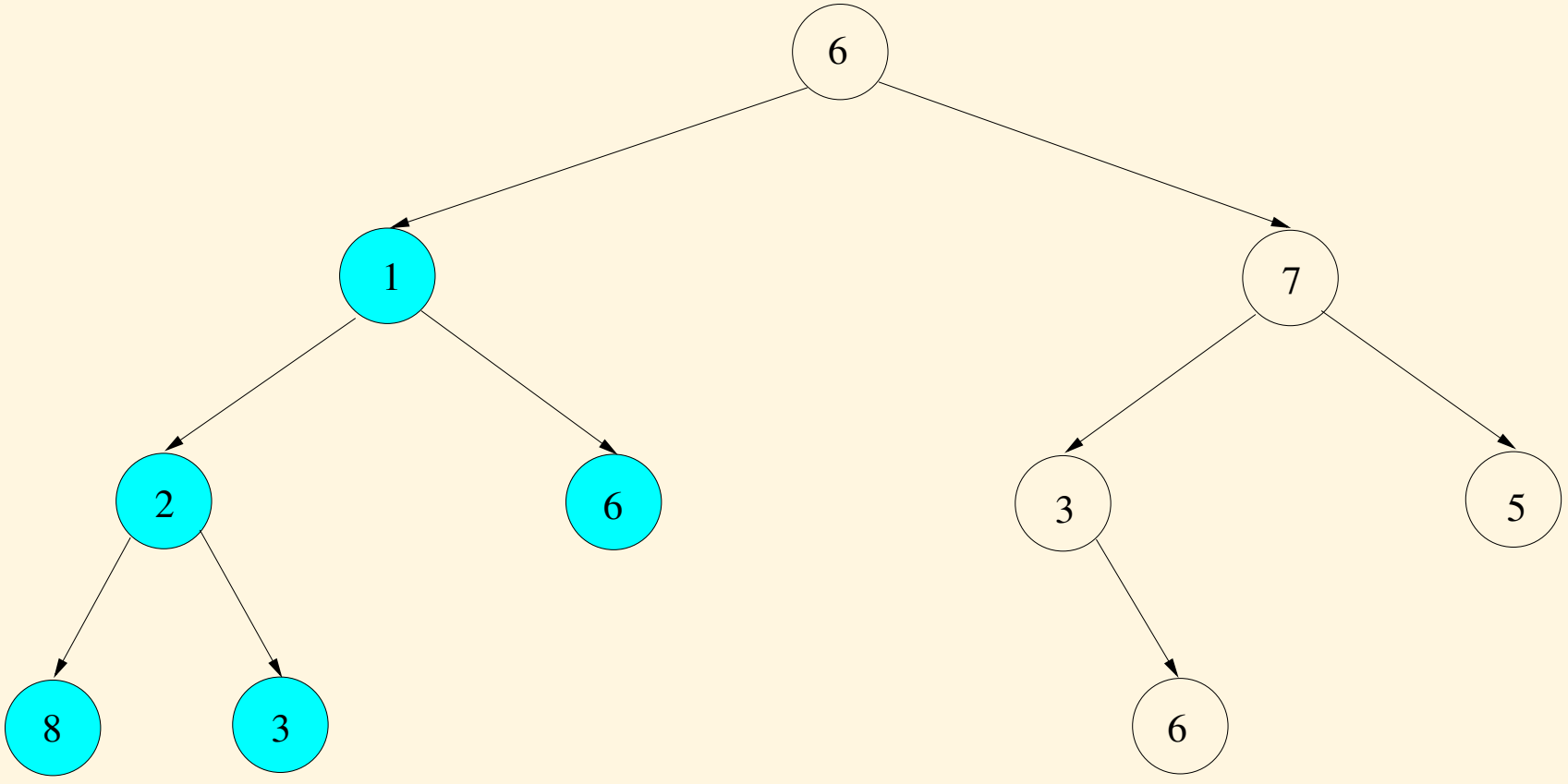
Arbre enraciné

Ancêtre et descendant



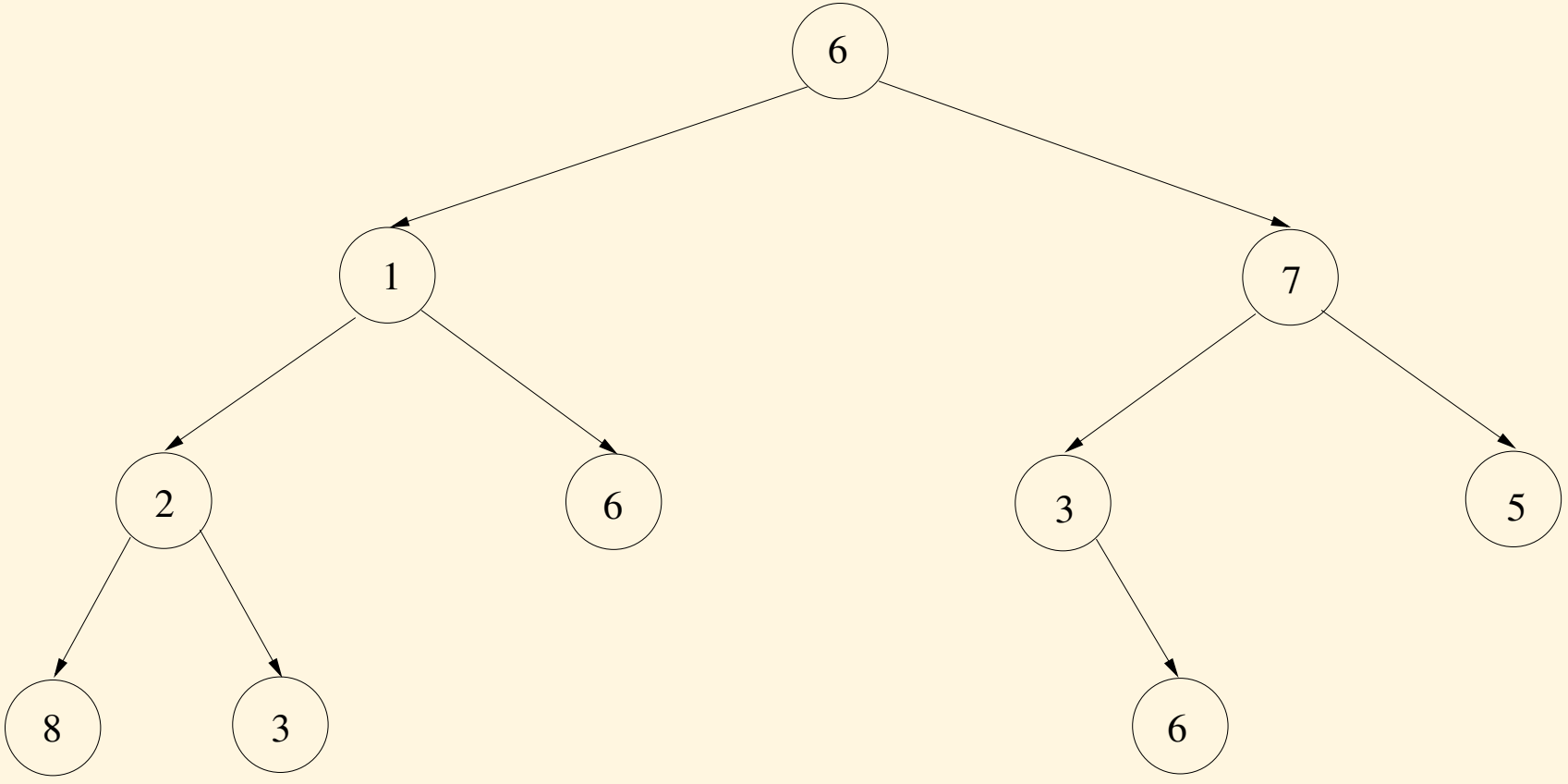
Arbre enraciné

Sous-arbre



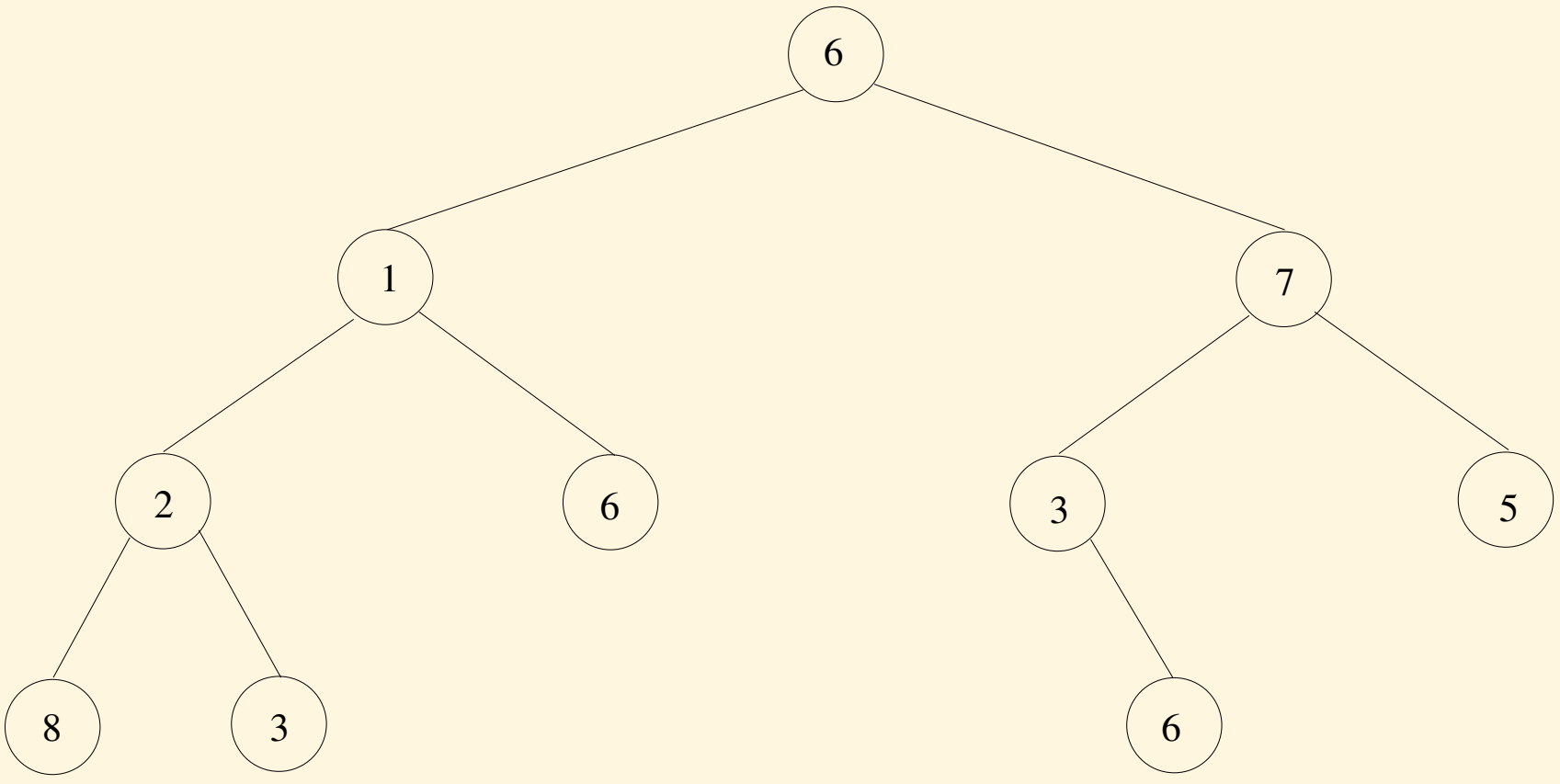
Arbre enraciné

Structure « naturellement » récursive

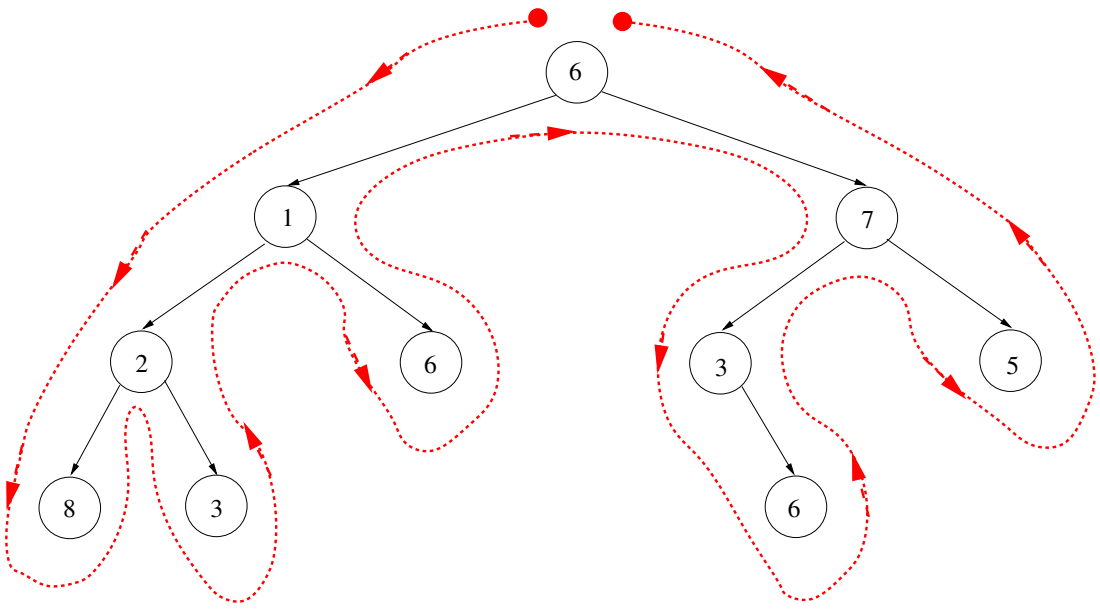


On se limite au cas des arbres binaires

Chaque nœud a au plus deux fils



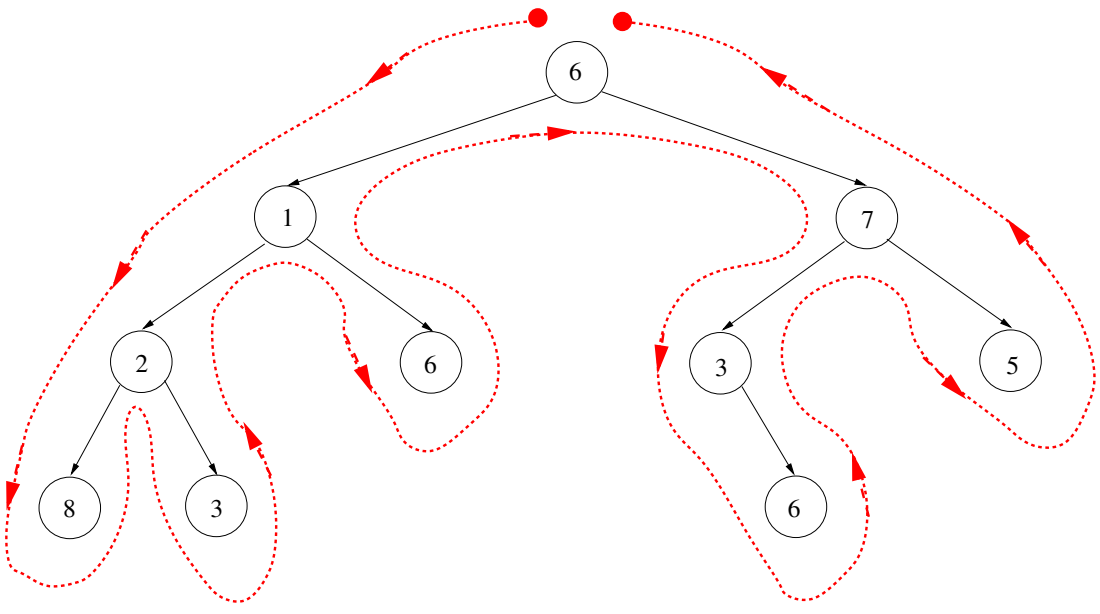
Parcourir les nœuds en suivant les arcs



Principe

- Départ : Racine
- Descendre, descendre...
- Remonter, redescendre...
- Etc.
- Remonter, remonter...
- Arrivée : Racine

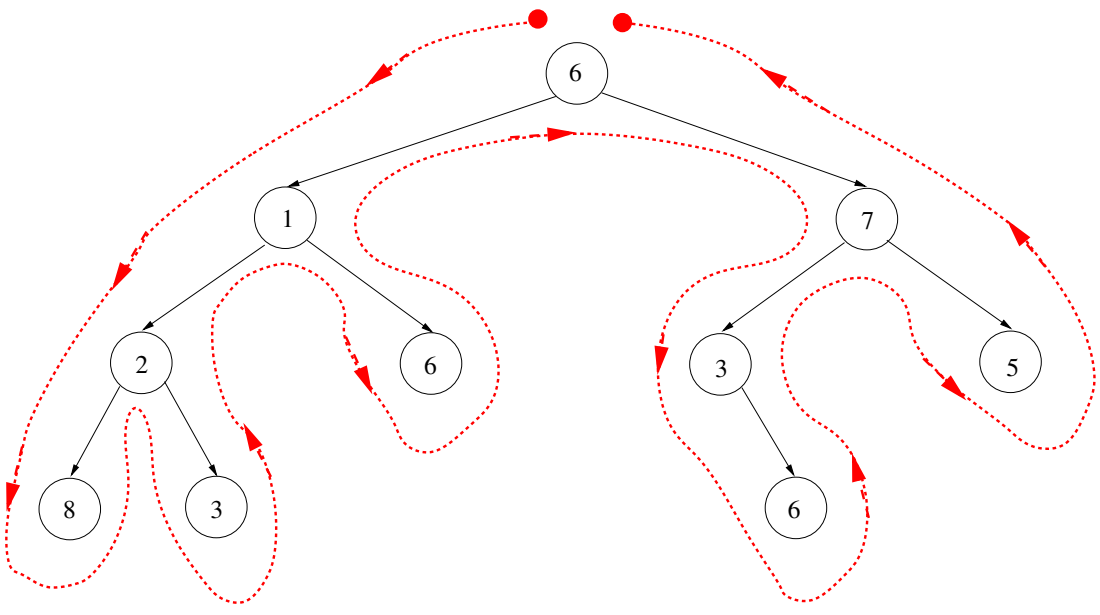
Parcourir les nœuds en suivant les arcs



Trois variantes

- Parcours préfixe
- Parcours postfixe
- Parcours infixe

Parcours préfixe



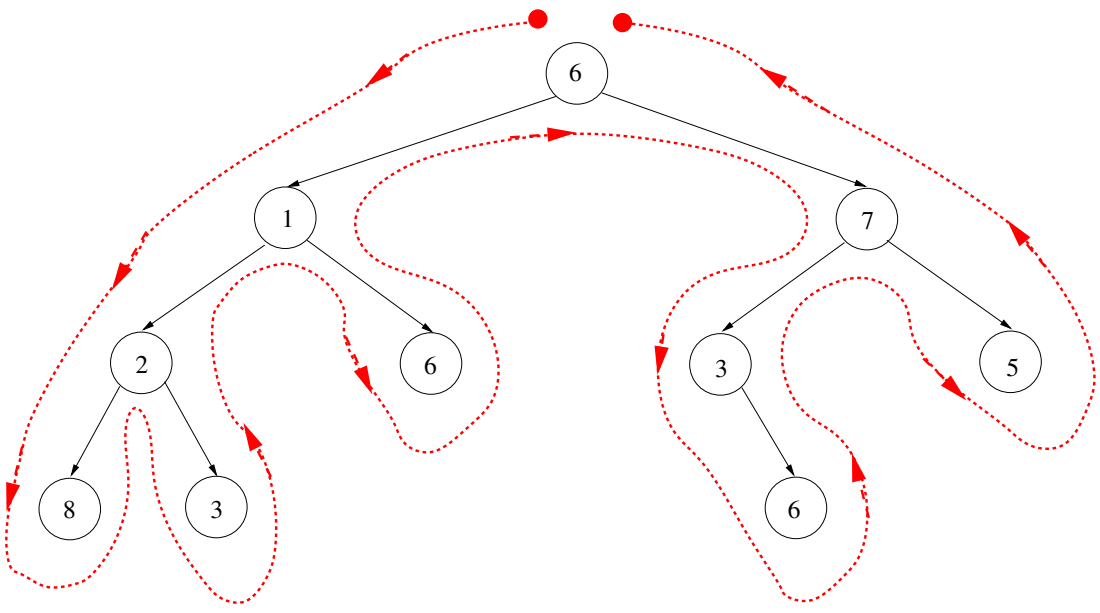
Principe

On traite d'abord la racine, puis on parcourt récursivement le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit

Illustration

$6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow$
$6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5$

Parcours préfixe



Algorithme

Fonction `Pref`(*A : nœud*)

début

  si $A \neq$ *NULL* **alors**

    Traiter(*A*)

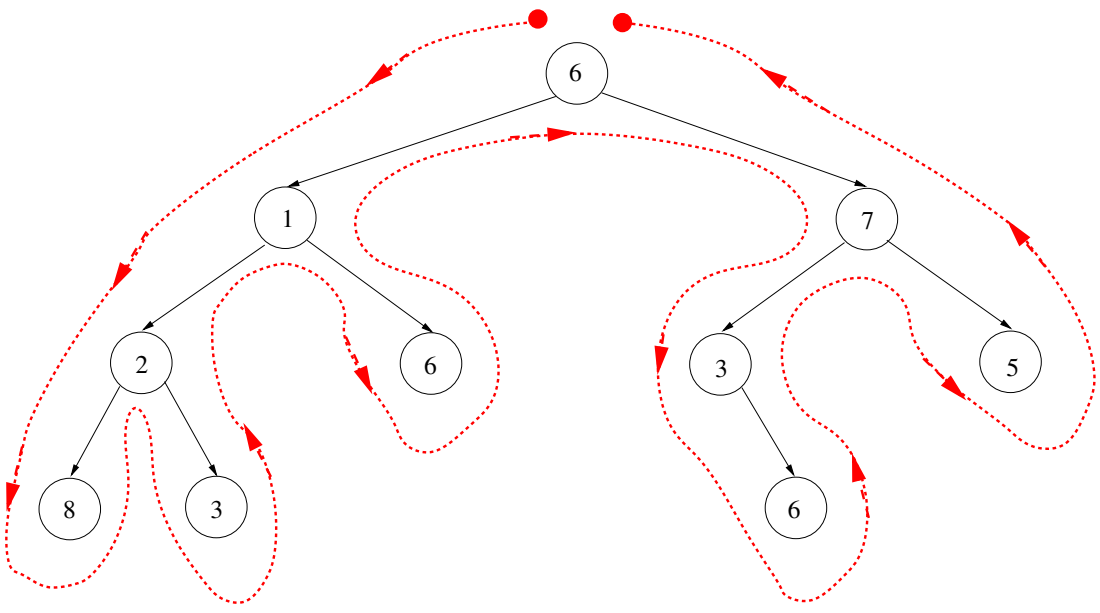
    `Pref`(FilsGauche(*A*))

    `Pref`(FilsDroit(*A*))

  fin

fin

Parcours postfixe



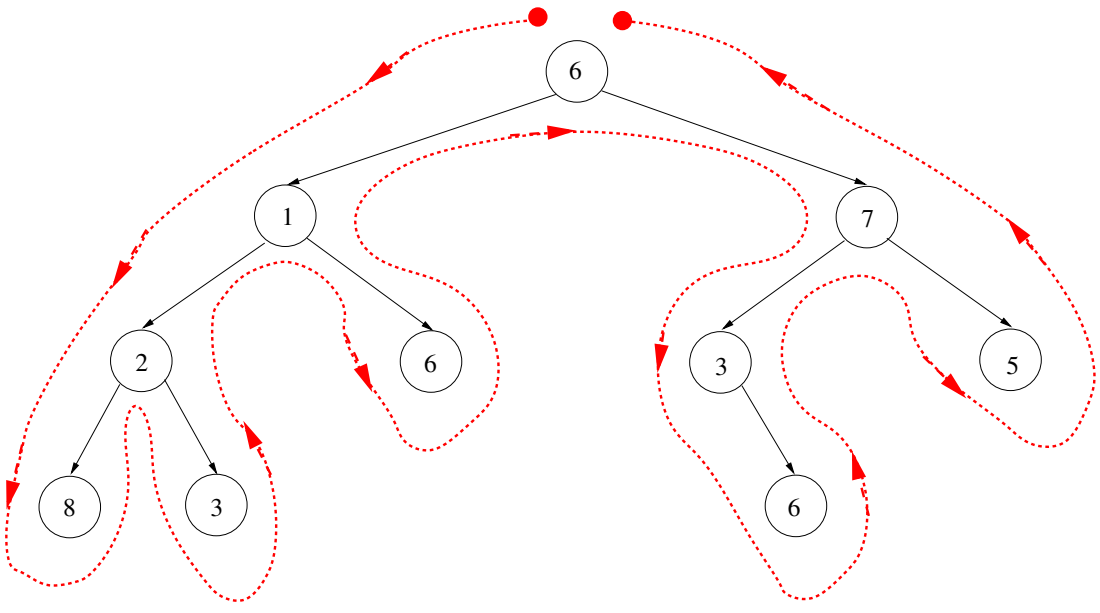
Principe

On parcourt récursivement le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit, puis on traite la racine

Illustration

$8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 1 \longrightarrow$
$6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6$

Parcours postfixe



Algorithme

Fonction `Postf`(*A : nœud*)

début

  si $A \neq$ *NULL* **alors**

    `Postf`(FilsGauche(*A*))

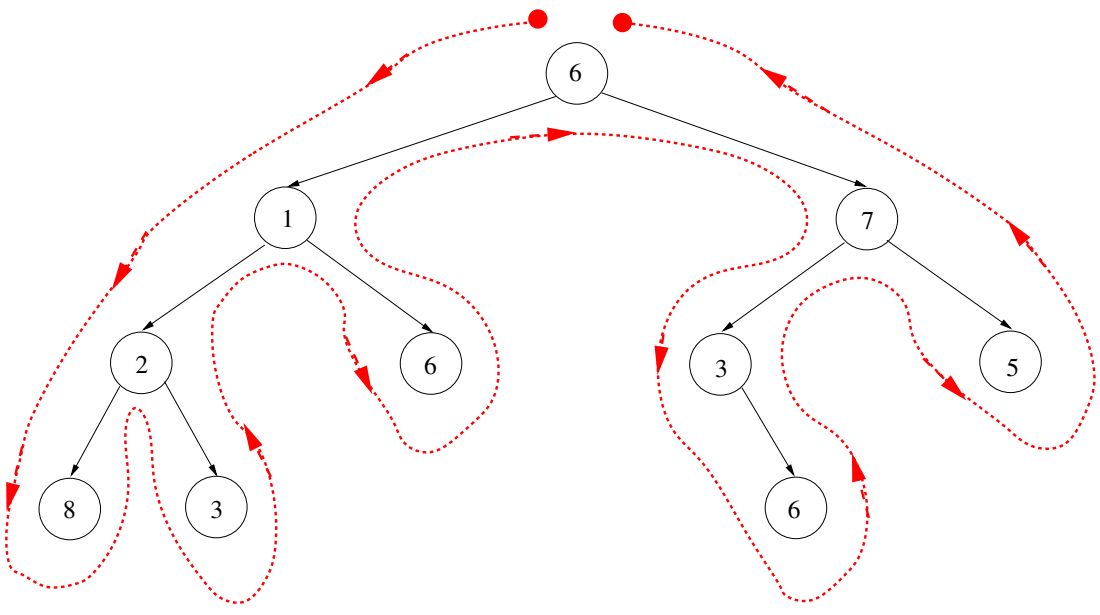
    `Postf`(FilsDroit(*A*))

    Traiter(*A*)

  fin

fin

Parcours infixe



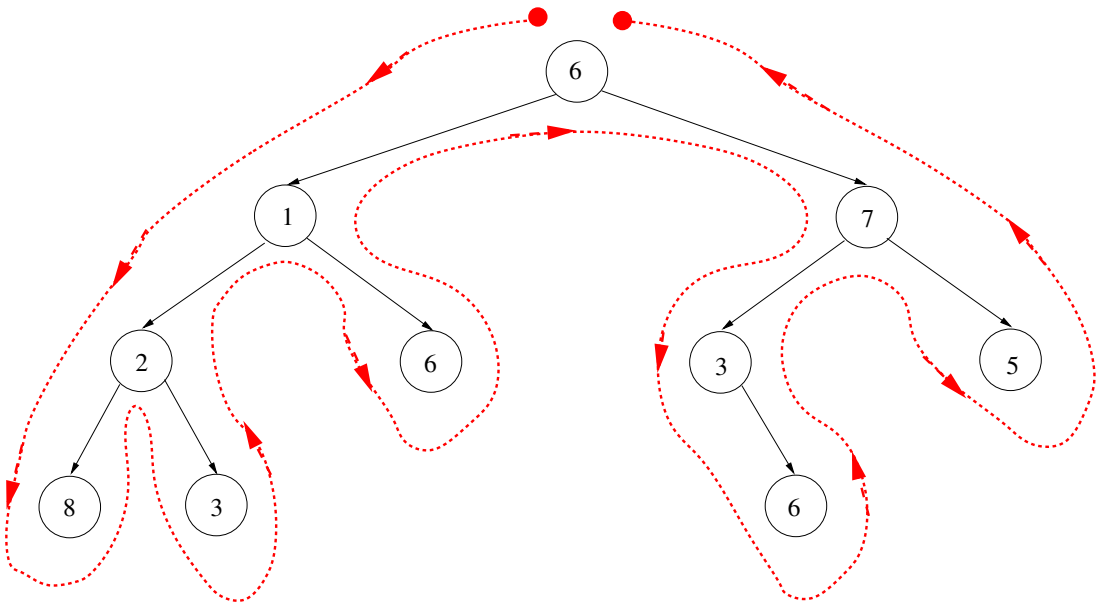
Principe

On parcourt récursivement le sous-arbre gauche, puis on traite la racine, et ensuite on parcourt récursivement le sous-arbre droit

Illustration

$8 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow$
$6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5$

Parcours infixe



Algorithme

Fonction `Inf`(*A : nœud*)

début

  si $A \neq$ *NULL* **alors**

    `Inf`(FilsGauche(*A*))

    Traiter(*A*)

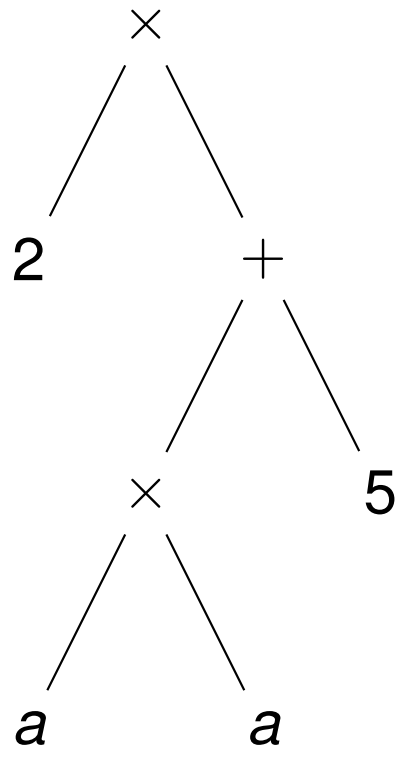
    `Inf`(FilsDroit(*A*))

  fin

fin

Arbres syntaxiques

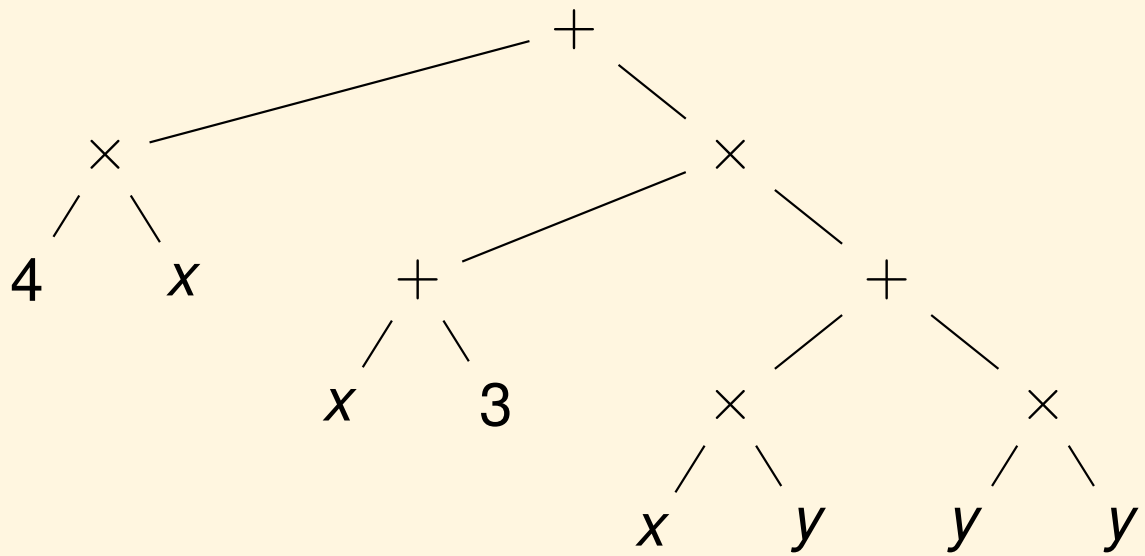
- On associe à l'expression $2(a^2 + 5)$ l'arbre ci-contre :
- À toute expression mathématique, on associe un arbre enraciné qui traduit la construction récursive de l'expression.
- Les feuilles représentent les nombres ou les variables et les nœuds intérieurs représentent les opérations.



Arbres syntaxiques

Exercice

1. Construire l'arbre associé à l'expression :
   $(x + y)^2 + (2x + 1)(y + 3)$
2. Déterminer l'expression associée à l'arbre :

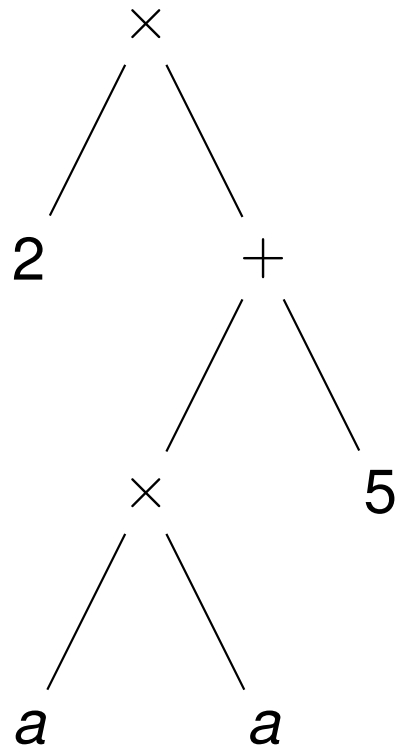


Arbres syntaxiques

Parcours préfixe

$\times 2 + \times aa5$

- Notation polonaise
- Pas besoin de parenthèses

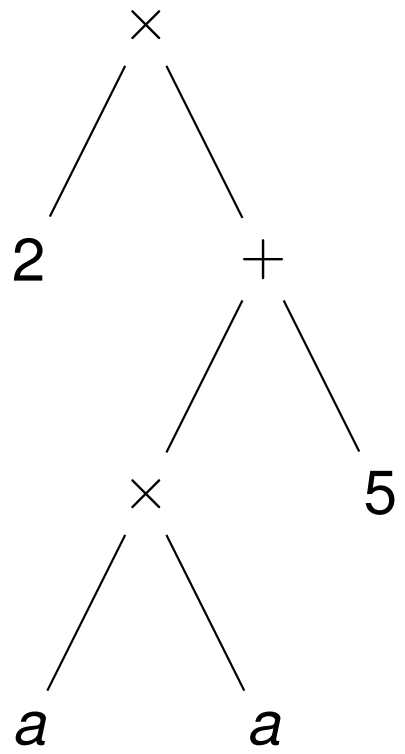


Arbres syntaxiques

Parcours préfixe

$$\times 2 + \times aa5$$

- Notation polonaise
- Pas besoin de parenthèses

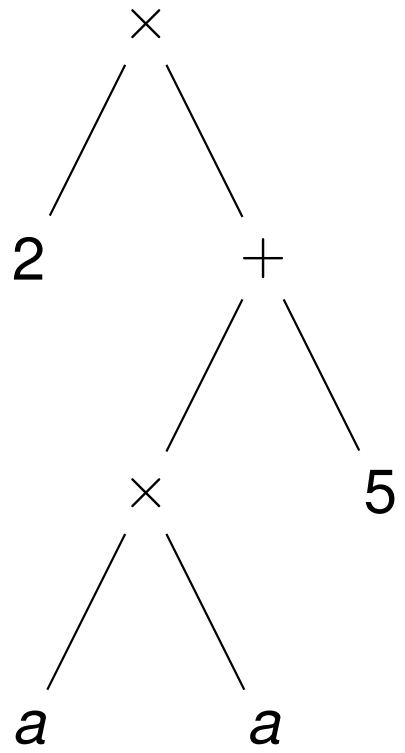


Arbres syntaxiques

Parcours postfixe

$$2aa \times 5 + \times$$

- Notation polonaise inversée
- Pas besoin de parenthèses
- Permet une évaluation récursive de l'arbre

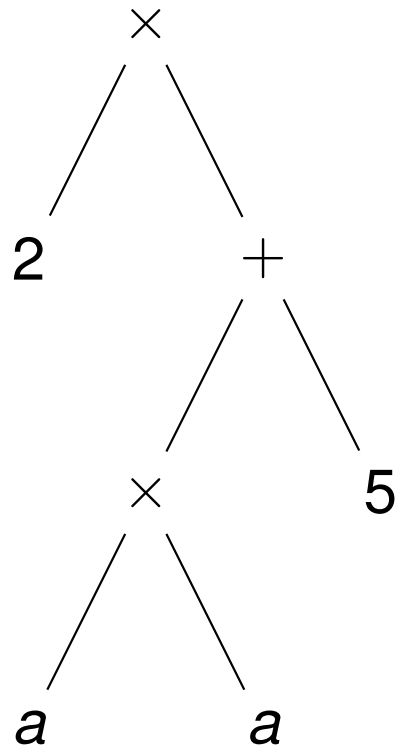


Arbres syntaxiques

Parcours postfixe

$$2aa \times 5 + \times$$

- Notation polonaise inversée
- Pas besoin de parenthèses
- Permet une évaluation récursive de l'arbre

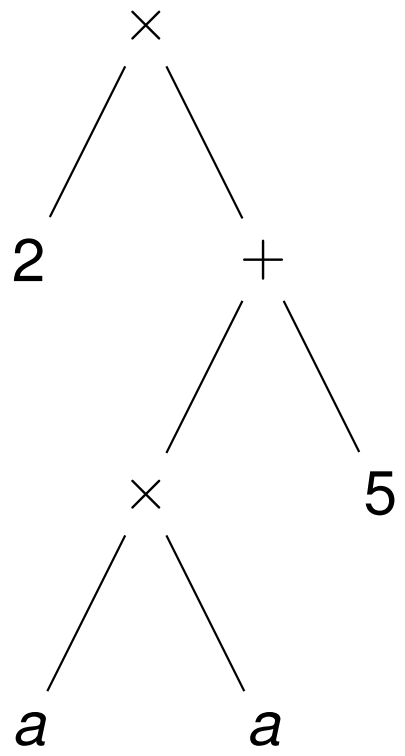


Arbres syntaxiques

Parcours infixe

$$2 \times a \times a + 5$$

- Problème de parenthèses...
- Première visite $\longrightarrow$ (
- Dernière visite $\longrightarrow$)
- Sauf pour les feuilles
- $(2 \times ((a \times a) + 5))$

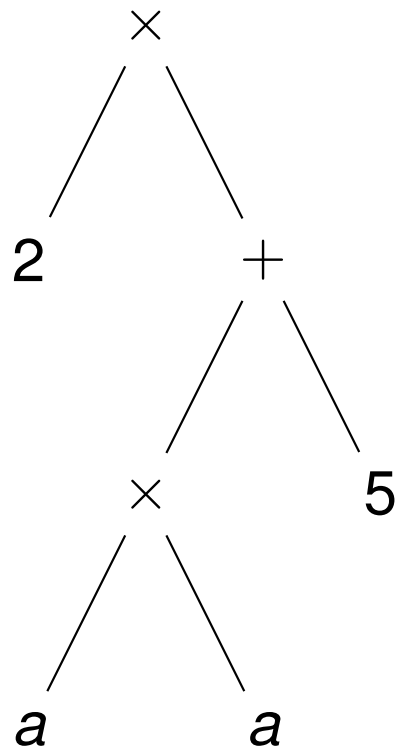


Arbres syntaxiques

Parcours infixe

$$2 \times a \times a + 5$$

- Problème de parenthèses...
- Première visite $\longrightarrow$ (
- Dernière visite $\longrightarrow$)
- Sauf pour les feuilles
- $(2 \times ((a \times a) + 5))$



Arbres syntaxiques

Exercice

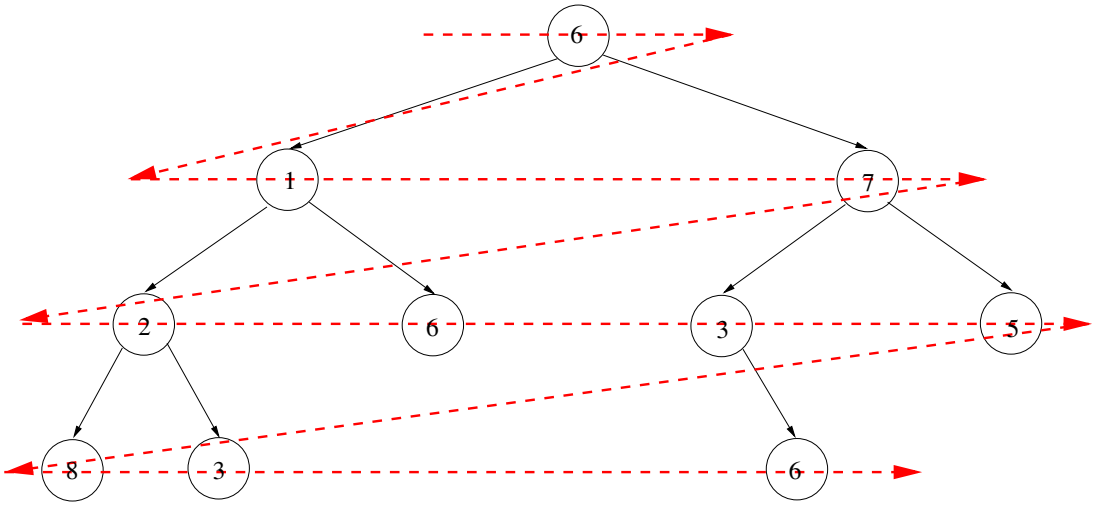
1. Déterminer la notation polonaise inversée correspondant à l'expression :

$$(x + y)^2 + (2x + 1)(y + 3)$$

2. Déterminer l'expression associée à la notation polonaise :

$$\times + \times 3xy + 5 \times 2y$$

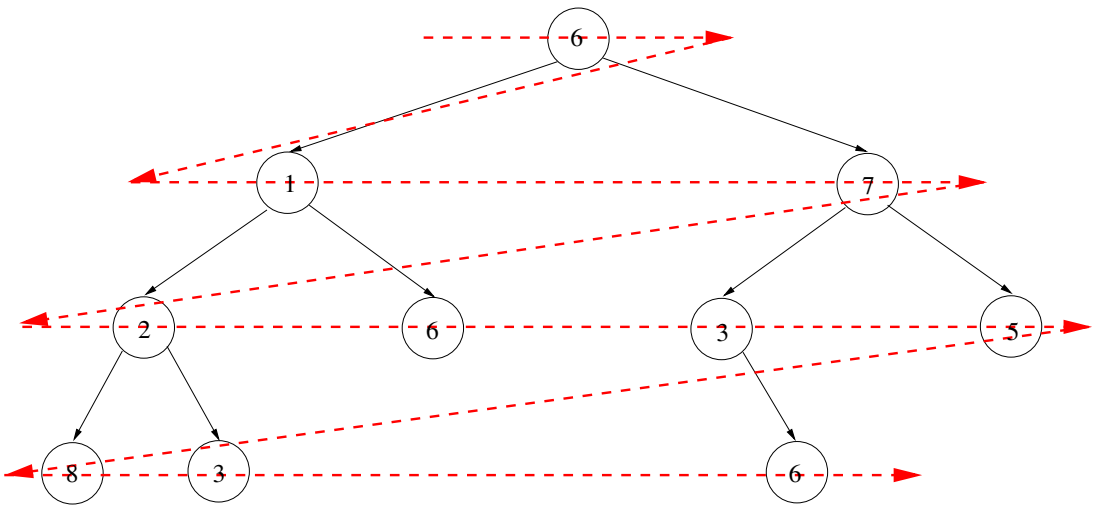
Parcourir les nœuds niveau par niveau



Principe

- Départ : Racine
- Parcourir les fils de la racine
- Puis les fils des fils de la racine
- Etc.
- Arrivée : dernier nœud du dernier niveau

Parcourir les nœuds niveau par niveau



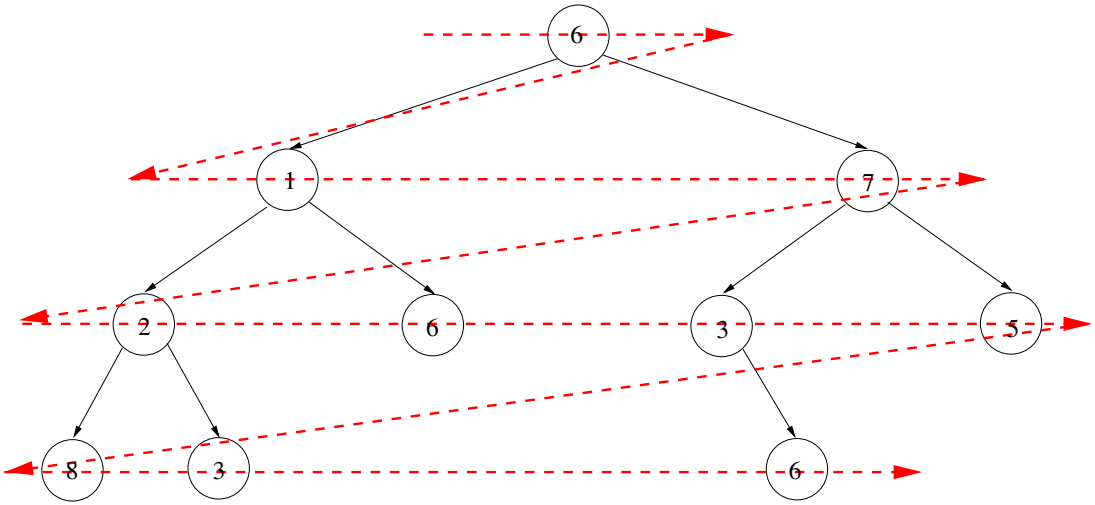
Illustration

$6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow$
$3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6$

Remarque

Pas de récursivité naturelle dans ce cas

Parcourir les nœuds niveau par niveau

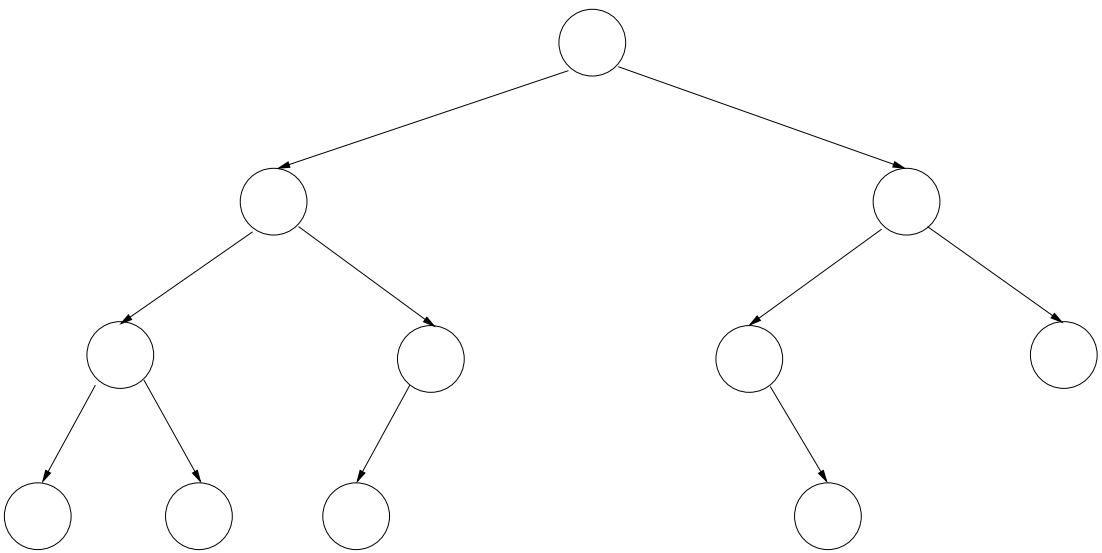


Algorithme

Fonction `Larg`(*i : niveau*)

début
  Donner à *i* la valeur 0
  tant que $i \leq$ `max` **faire**
    pour *A de niveau i* **faire**
      Traiter(*A*)
    fin
    Donner à *i* la valeur $i + 1$
  fin
fin

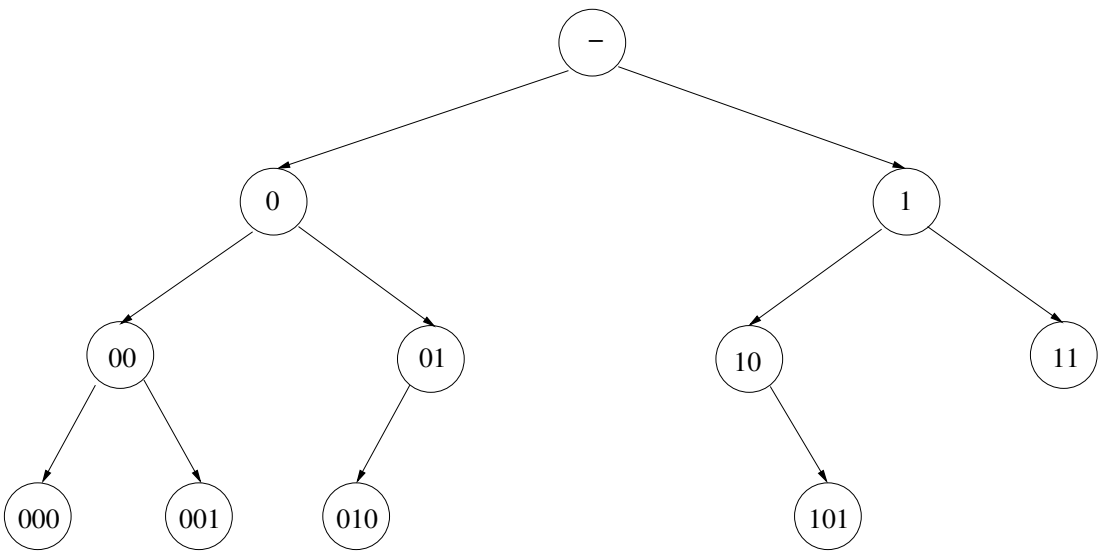
Étiqueter les nœuds



Principe

- Racine $\rightsquigarrow -$
- Fils gauche $\rightsquigarrow 0$
- Fils droit $\rightsquigarrow 1$
- Etc.
- Fils gauche de $w \rightsquigarrow w0$
- Fils droit de $w \rightsquigarrow w1$

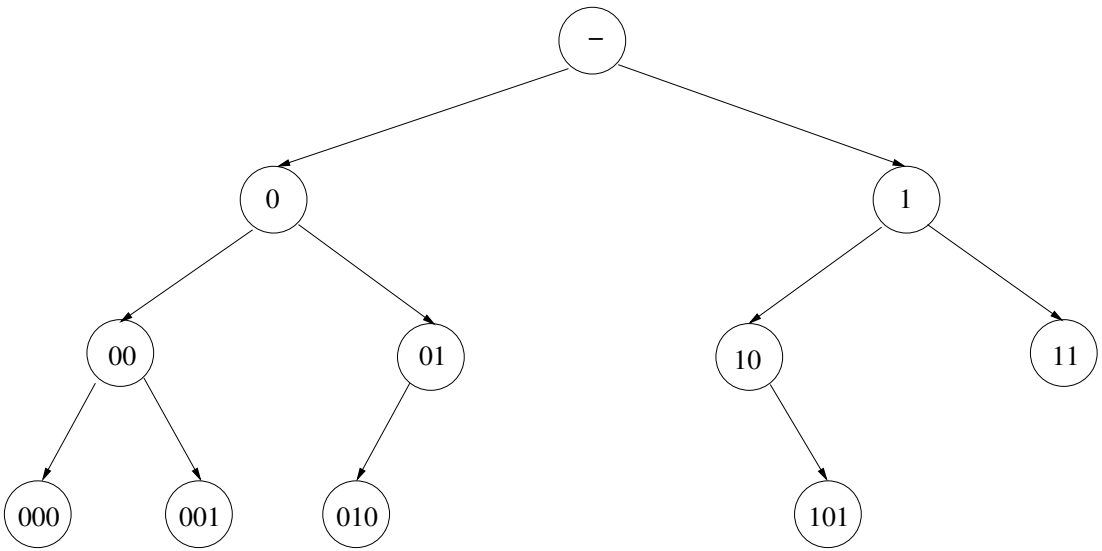
Étiqueter les nœuds



Principe

- Racine $\rightsquigarrow$ –
- Fils gauche $\rightsquigarrow$ 0
- Fils droit $\rightsquigarrow$ 1
- Etc.
- Fils gauche de $w \rightsquigarrow w0$
- Fils droit de $w \rightsquigarrow w1$

Étiqueter les nœuds



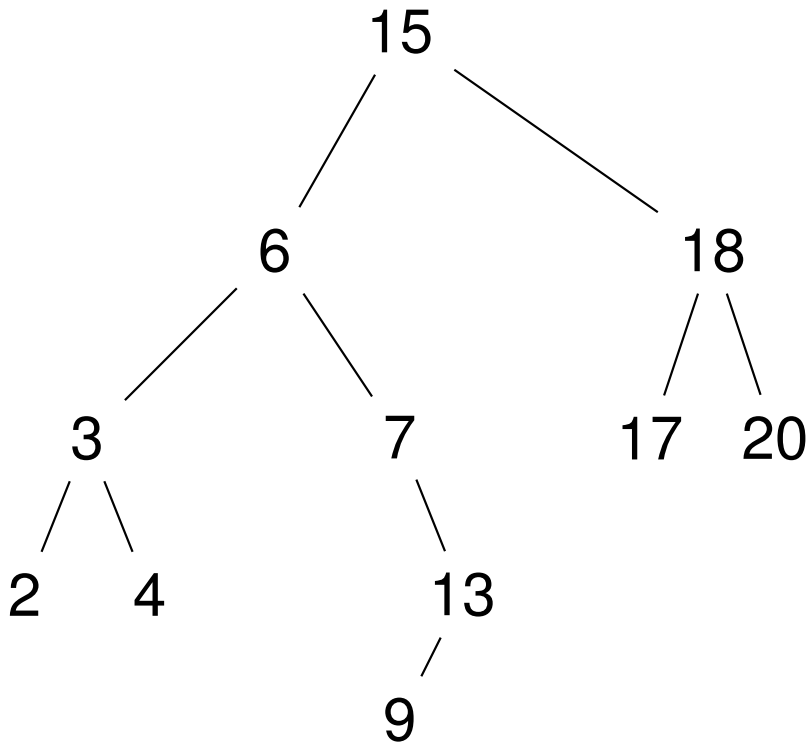
Parcours en largeur

$– \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 00 \longrightarrow$
$01 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 000 \longrightarrow$
$001 \longrightarrow 010 \longrightarrow 101$

Observation

On visite les nœuds dans l'ordre lexicographique de leurs étiquettes.

Arbre binaire de recherche

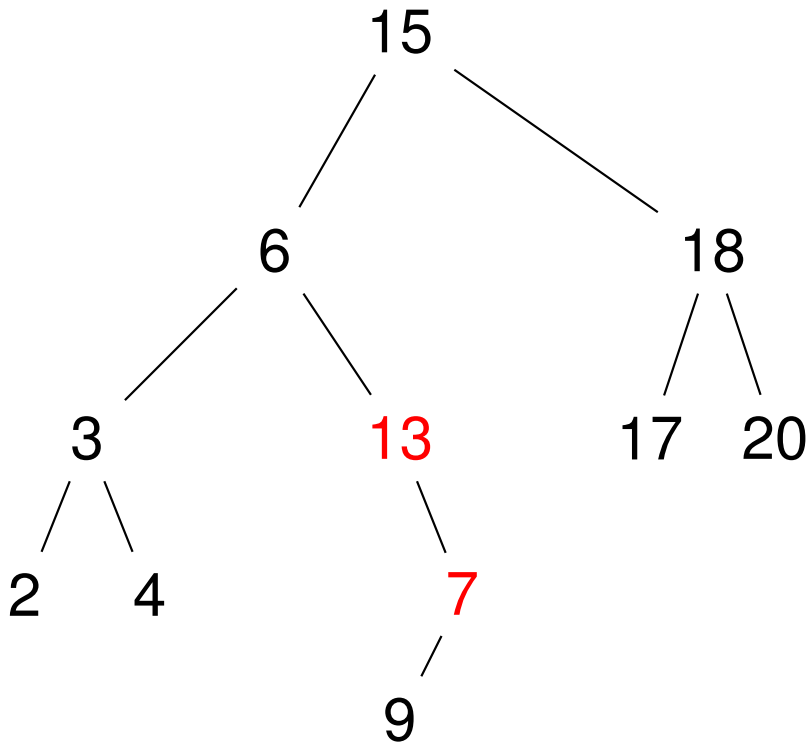


Organisation des étiquettes

Pour tout nœud x :

- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre gauche de x sont inférieures à l'étiquette de x
- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre droit de x sont supérieures à l'étiquette de x

Arbre binaire de recherche

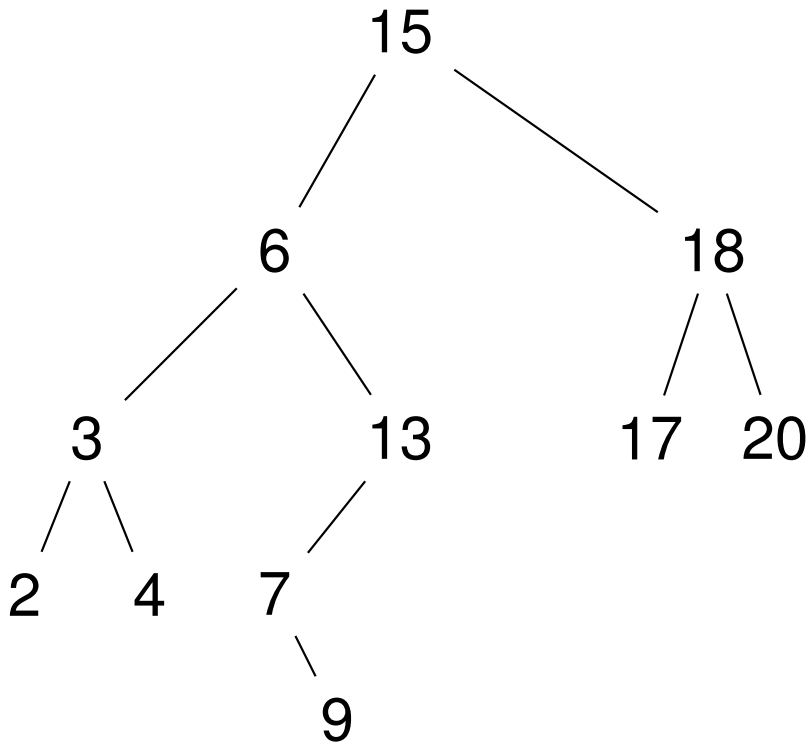


Organisation des étiquettes

Pour tout nœud x :

- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre gauche de x sont inférieures à l'étiquette de x
- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre droit de x sont supérieures à l'étiquette de x

Arbre binaire de recherche

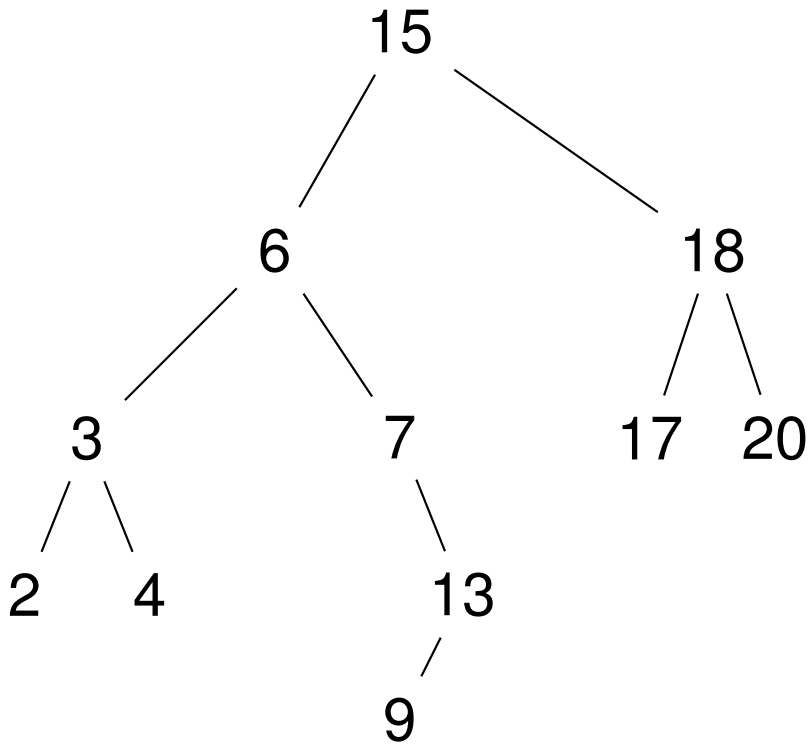


Organisation des étiquettes

Pour tout nœud x :

- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre gauche de x sont inférieures à l'étiquette de x
- Les étiquettes de tous les nœuds du sous-arbre droit de x sont supérieures à l'étiquette de x

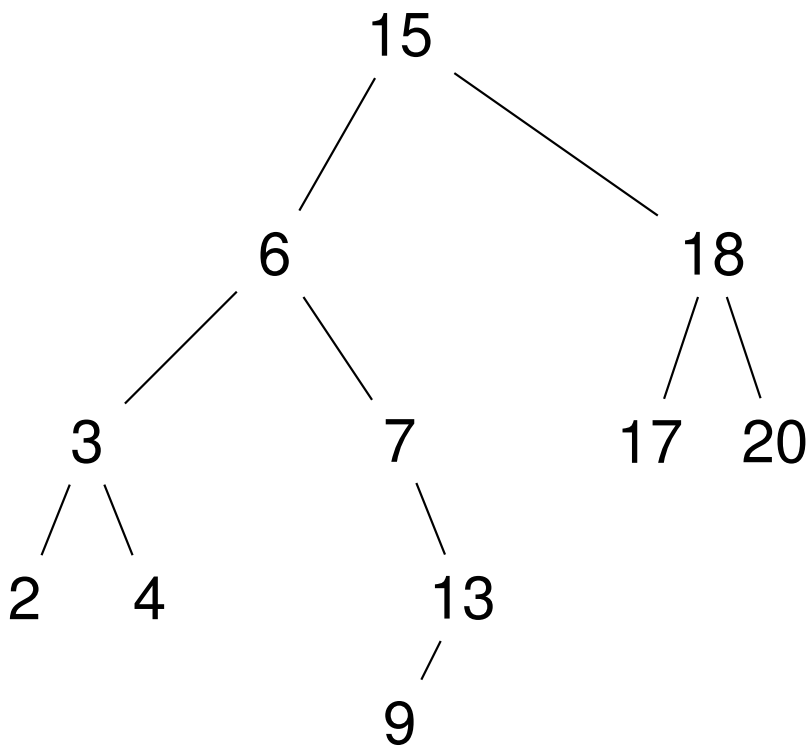
Arbre binaire de recherche



Remarque

Pour simplifier, on suppose que les étiquettes des nœuds sont toutes différentes.

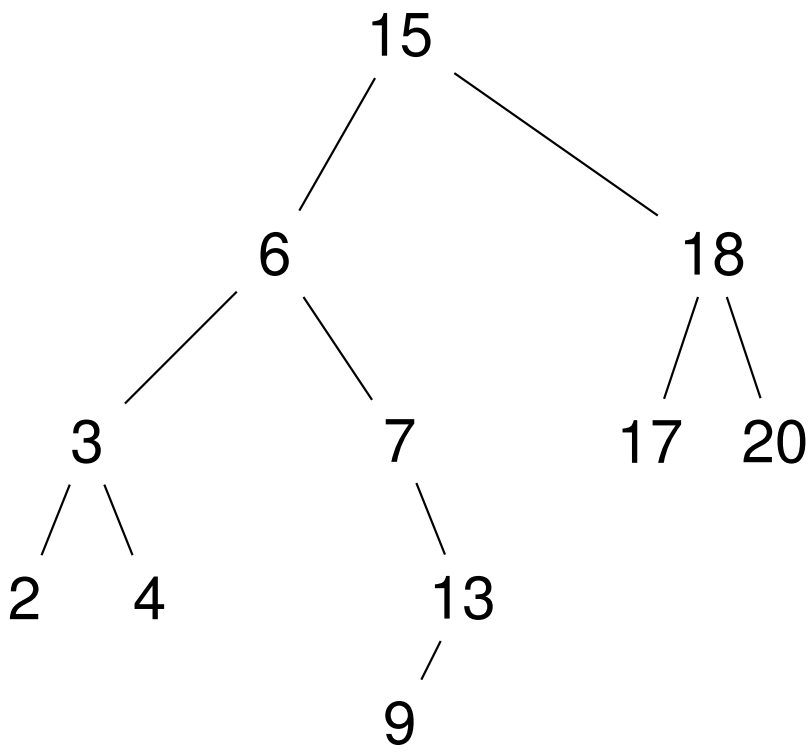
Recherche d'une valeur



Y-a-t-il un nœud étiqueté 13 ?

- Départ : Racine 15 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche
- Racine 6 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous-arbre droit
- Racine 7 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous arbre droit
- Racine 13 $\longrightarrow$ trouvé !

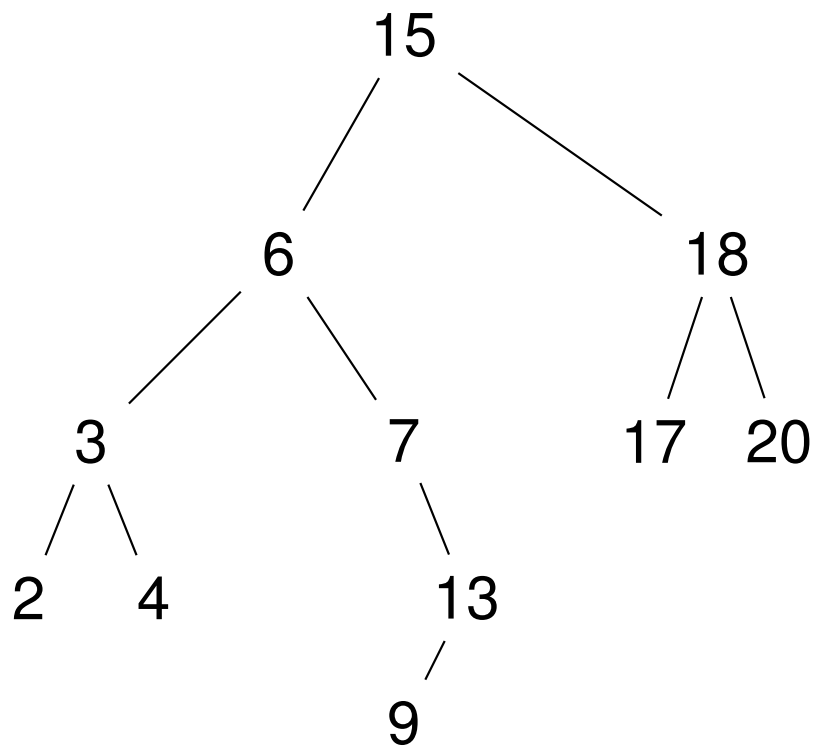
Recherche d'une valeur



Y-a-t-il un nœud étiqueté 16 ?

- Départ : Racine 15 $\longrightarrow$ trop petit $\longrightarrow$ sous-arbre droit
- Racine 18 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche
- Racine 17 $\longrightarrow$ trop grand $\longrightarrow$ sous-arbre gauche $\longrightarrow$ n'existe pas $\longrightarrow$ il n'y en a pas !

Recherche d'une valeur



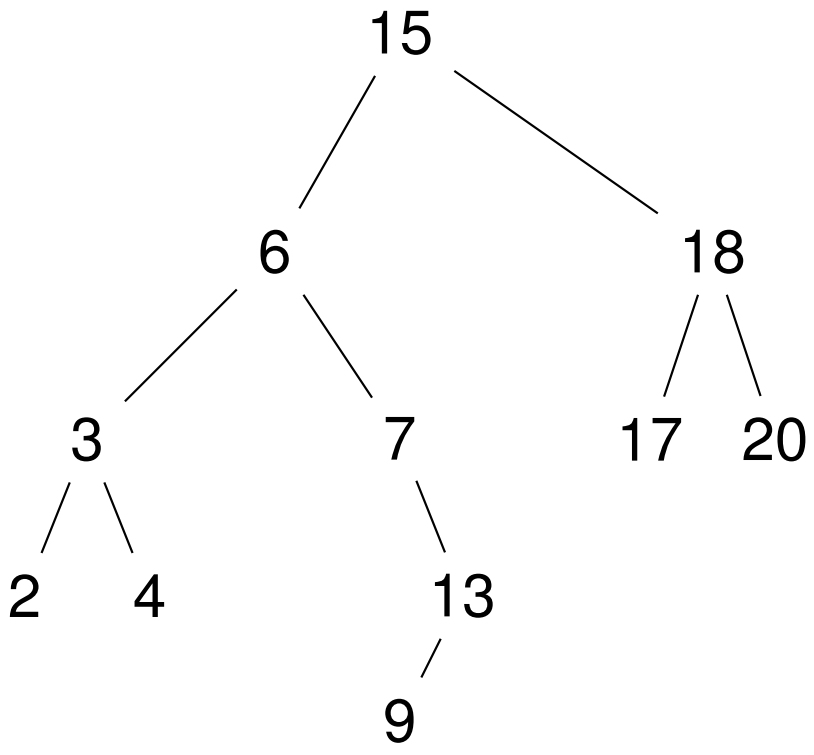
Algorithme

Fonction `Rech`(*x : label, A : nœud*)

début
- **si** $x = label(A)$ **ou** $A = NULL$ **alors**
  - Traiter(A)
- **sinon**
  - **si** $x < label(A)$ **alors**
    - `Rech`(x, FilsGauche(A))
  - **sinon**
    - `Rech`(x, FilsDroit(A))
  - **fin**
- **fin**

fin

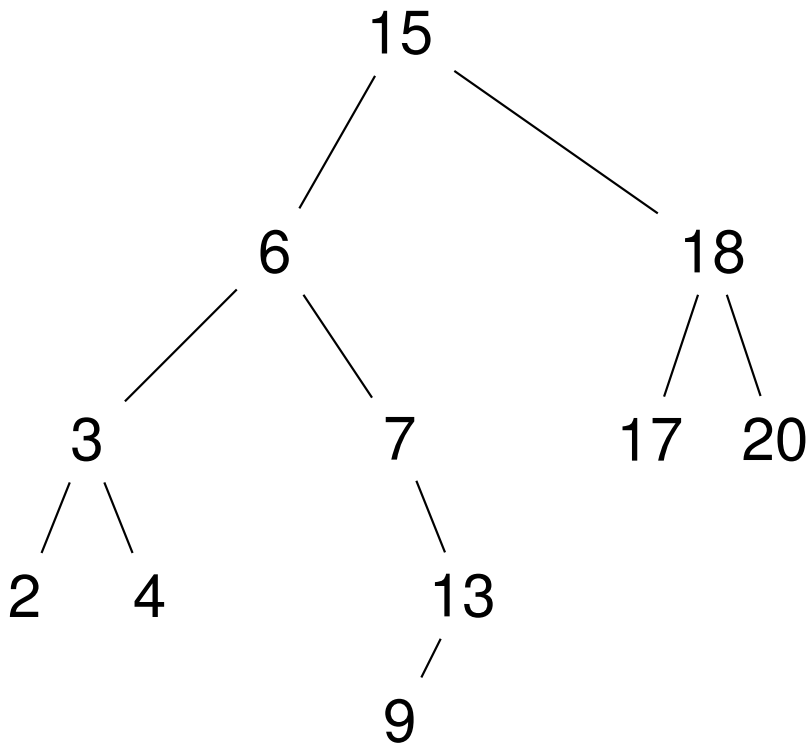
Pour aller plus loin



Questions

- Comment trouver le maximum dans un ABR ?
- Comment trouver le minimum dans un ABR ?

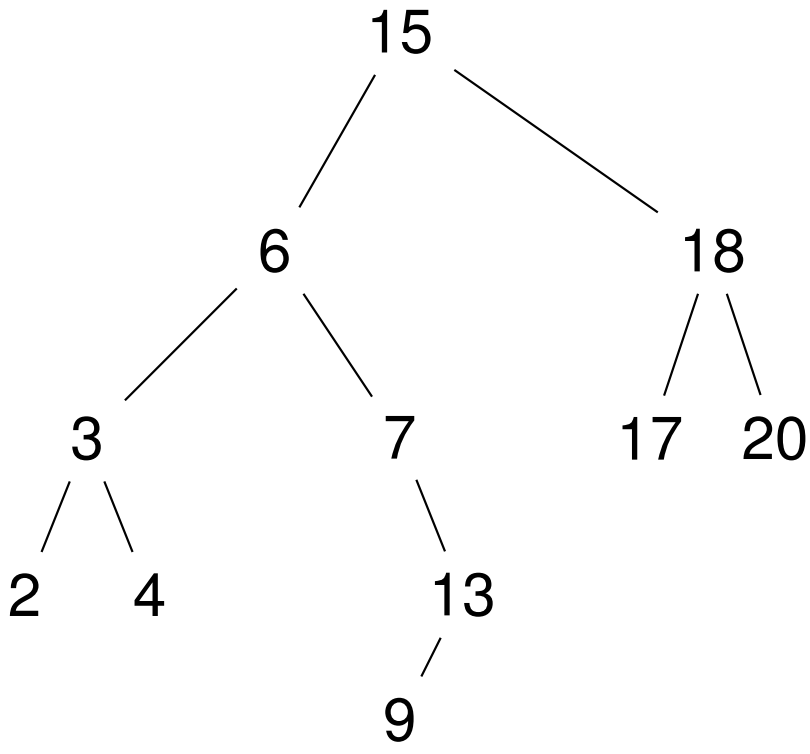
Pour aller plus loin



Recherche du maximum

- On va toujours à droite...

Pour aller plus loin

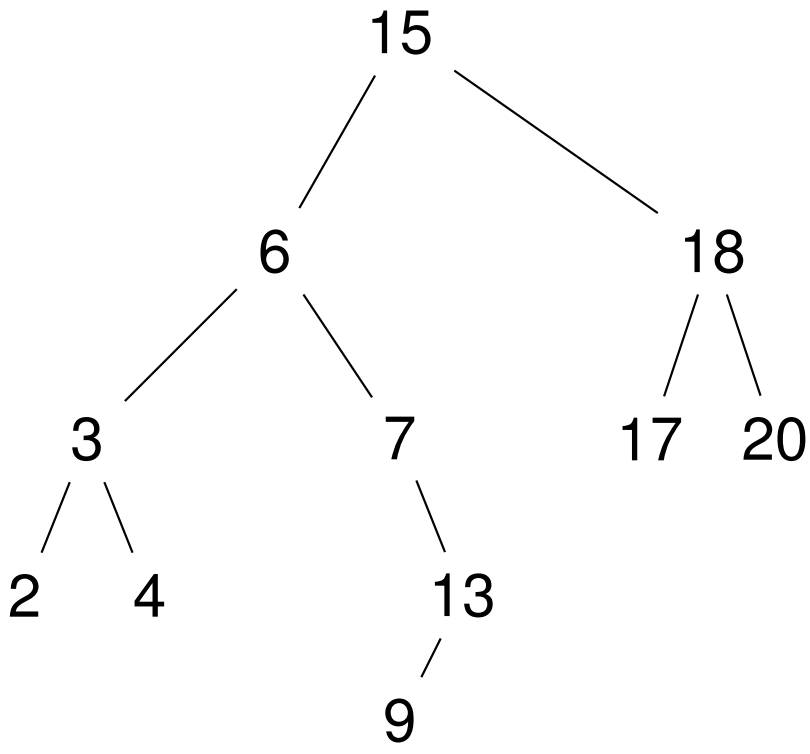


Recherche du maximum

Fonction `Max`(*A : nœud*)

début
  B prend la valeur FilsDroit(*A*)
  si $B = NULL$ **alors**
    Traiter(*A*)
  sinon
    `Max`(*B*)
  fin
fin

Parcours infixe d'un ABR



Algorithme

Fonction `Inf`(*A : nœud*)

début

  si $A \neq NULL$ **alors**

    `Inf`(FilsGauche(*A*))

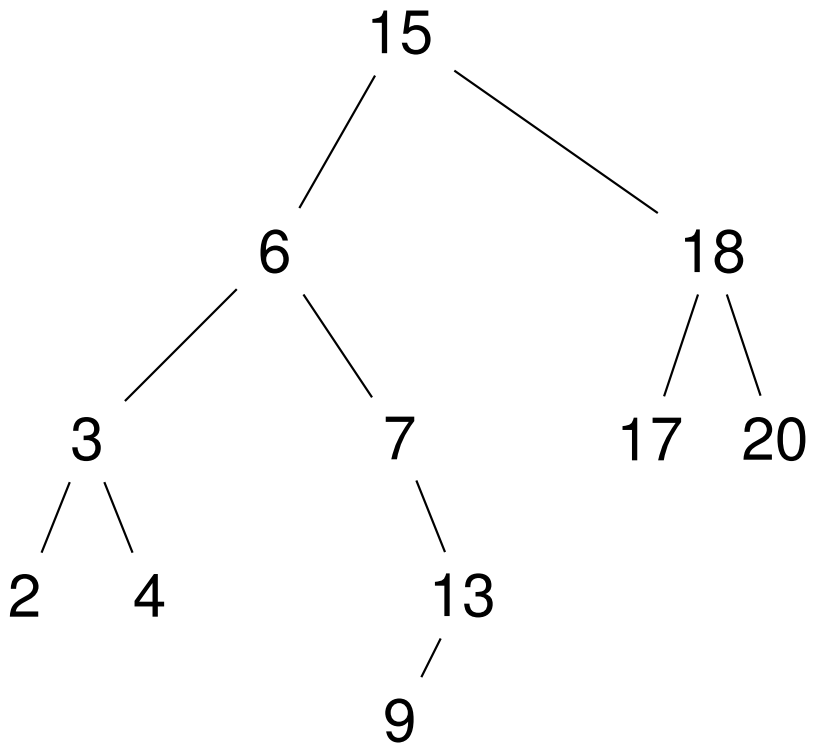
    Traiter(*A*)

    `Inf`(FilsDroit(*A*))

  fin

fin

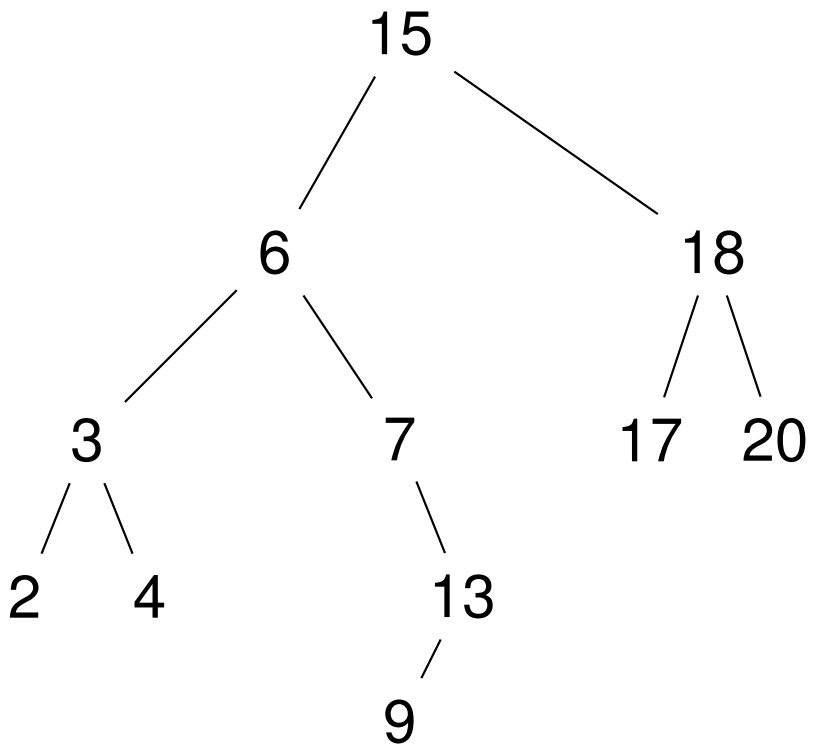
Parcours infixe d'un ABR



Résultat

- Départ $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ 4 $\longrightarrow$ 6 $\longrightarrow$ 7 $\longrightarrow$ 9 $\longrightarrow$ 13 $\longrightarrow$ 15 $\longrightarrow$ 17 $\longrightarrow$ 18 $\longrightarrow$ 20 $\longrightarrow$ Fin

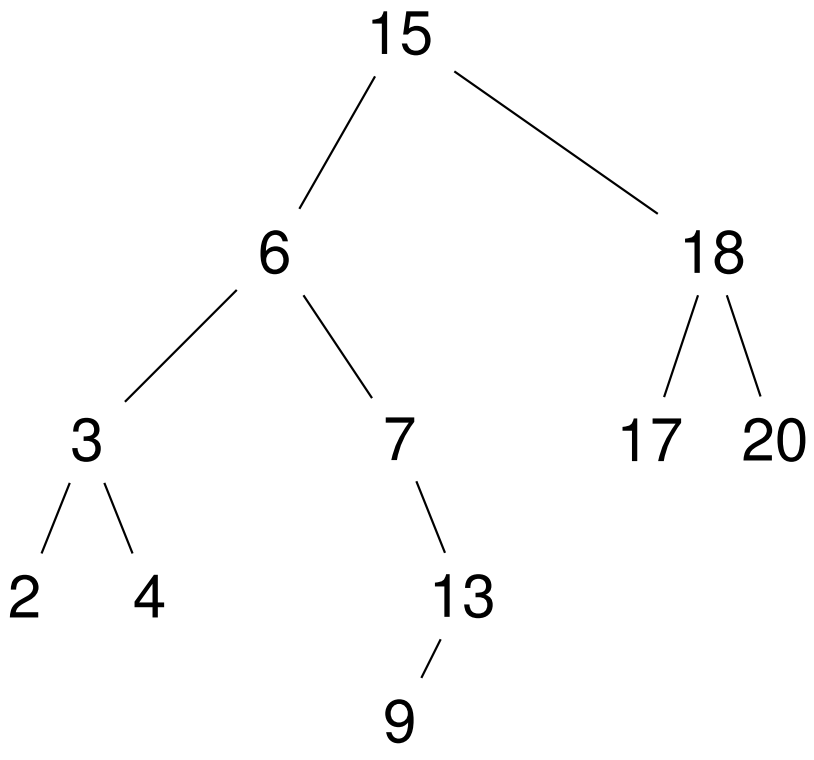
Parcours infixe d'un ABR



Observation

- Le parcours infixe d'un ABR traite les nœuds en suivant l'ordre de leur étiquette

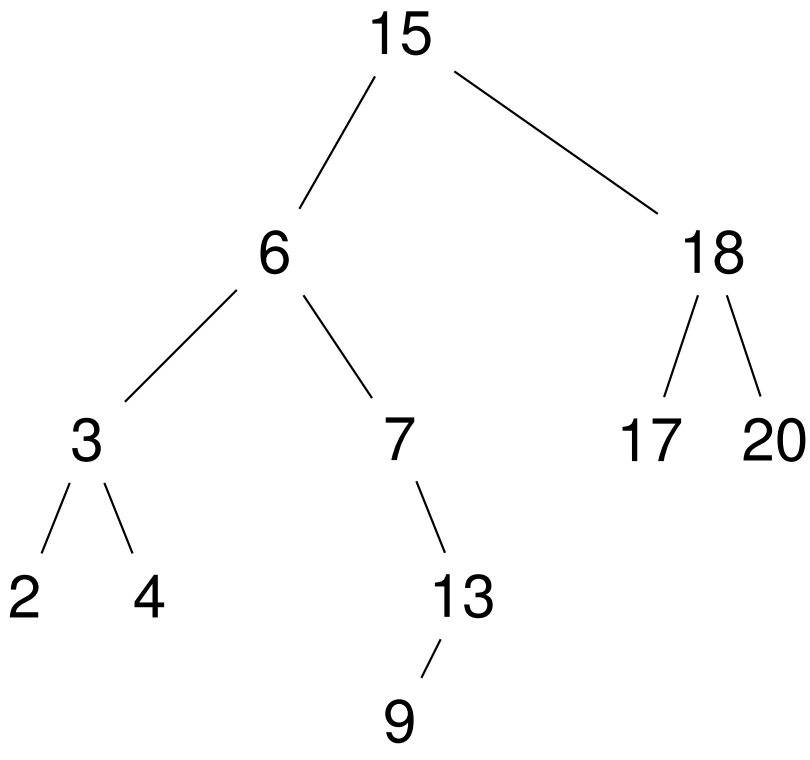
Pour aller plus loin



Questions

- Comment trouver le successeur d'un nœud dans un ABR ?
- Comment trouver le prédécesseur d'un nœud dans un ABR ?

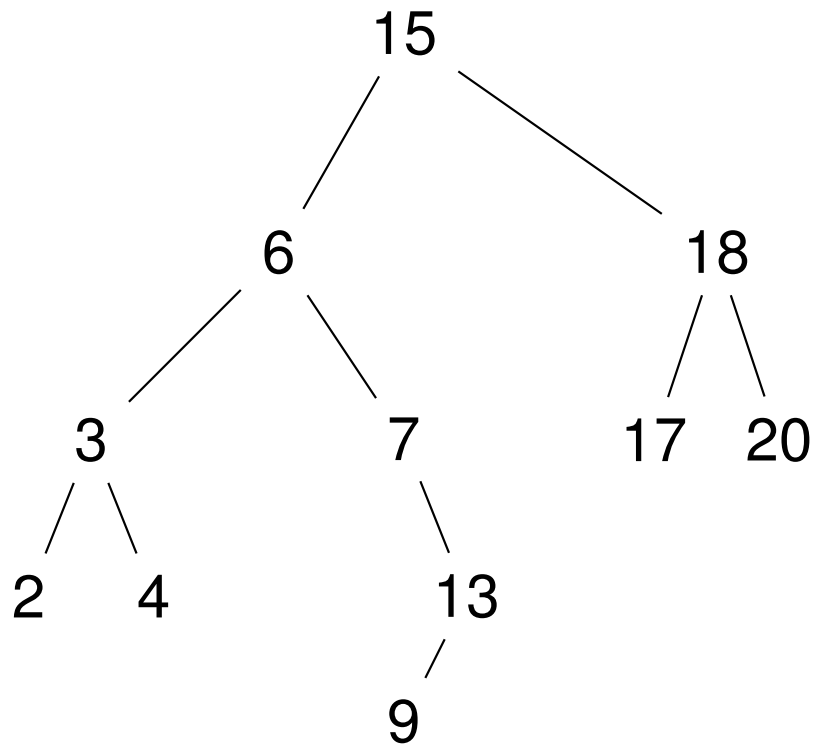
Pour aller plus loin



Recherche du successeur de *A*

- Si *A* possède un fils droit, le successeur de *A* est le minimum du sous-arbre droit de *A*
- Sinon, le successeur de *A* est le premier ancêtre de *A* en remontant dans l'arbre (s'il existe) dont *A* se trouve dans le sous-arbre gauche, car aucun nœud ne peut s'intercaler entre *A* et cet ancêtre
- Sinon, *A* est le maximum de l'arbre

Pour aller plus loin

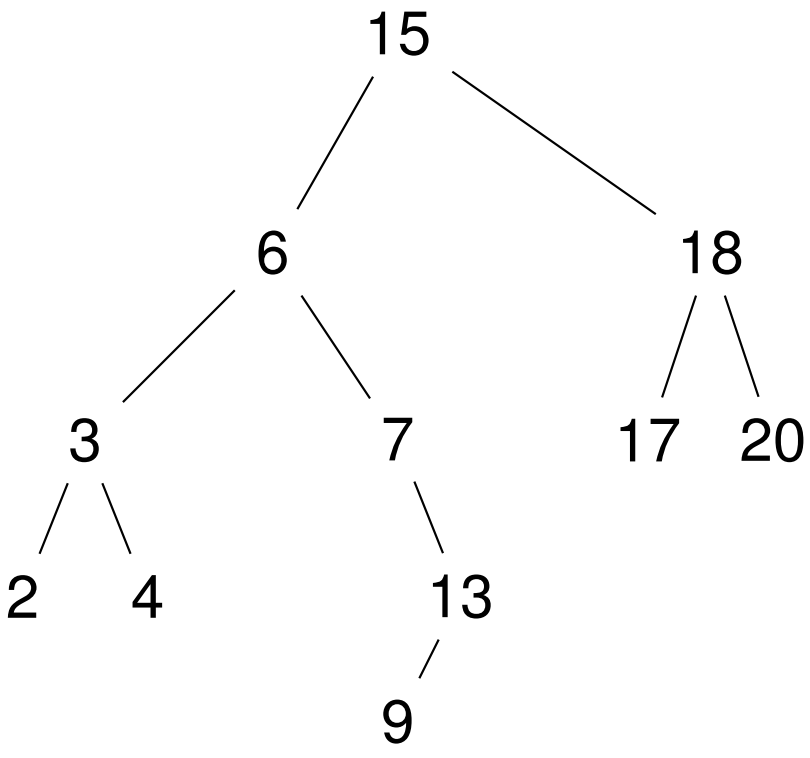


Recherche du successeur

Fonction `Succ`(*A : nœud*)

début
  si *FilsDroit(A)*$\neq$ `NULL` **alors**
    `Max`(FilsDroit(*A*))
  sinon
    B prend la valeur Pere(*A*)
    tant que *B* $\neq$ `NULL` **et**
    A $=$*FilsDroit(B)* **faire**
      A prend la valeur *B*
      B prend la valeur Pere(*B*)
    fin
    Traiter(*B*)
  fin
fin

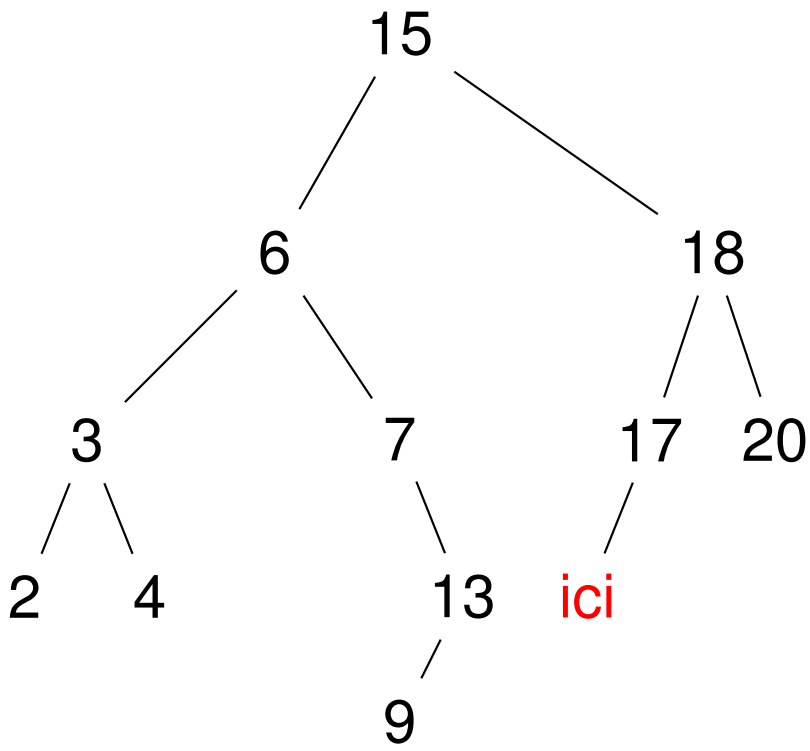
Ajouter un élément à un ABR



Question

- Ajouter un nœud portant l'étiquette 16 ?

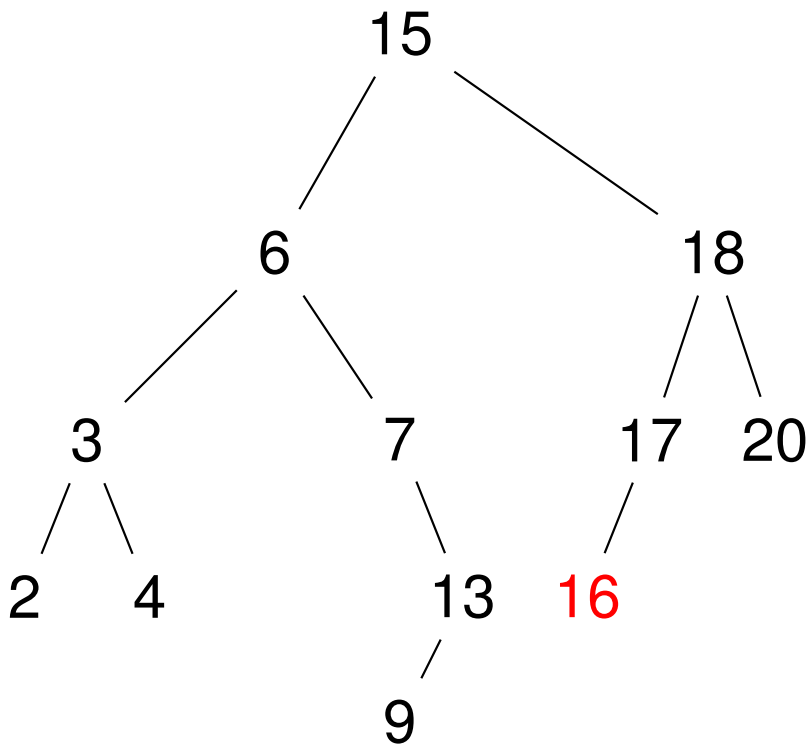
Ajouter un élément à un ABR



Recherche de la position

- On utilise la fonction de recherche d'une valeur dans un ABR
- Comme l'étiquette 16 n'apparaît pas, on obtient la valeur `NULL`
- Correspondant à la position que devrait occuper le nœud
- On ajoute une feuille d'étiquette 16 à cet endroit

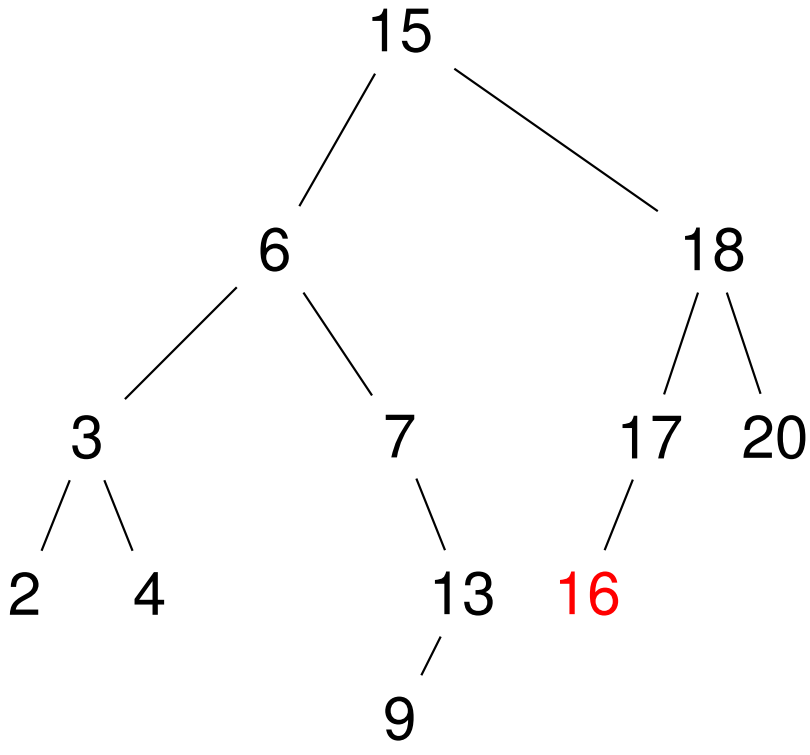
Ajouter un élément à un ABR



Recherche de la position

- On utilise la fonction de recherche d'une valeur dans un ABR
- Comme l'étiquette 16 n'apparaît pas, on obtient la valeur `NULL`
- Correspondant à la position que devrait occuper le nœud
- On ajoute une feuille d'étiquette 16 à cet endroit

Ajouter un élément à un ABR

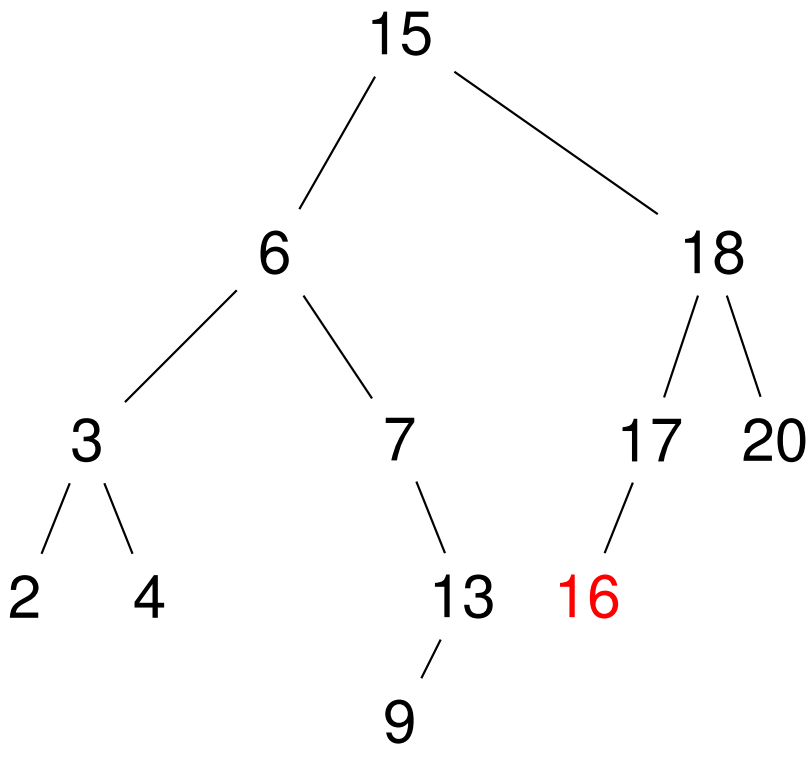


Insertion (provisoire)

Fonction `Insert`(*x :label,A :nœud*)

début
  si $x = label(A)$ **ou** $A = NULL$ **alors**
    Donner à $label(A)$ la valeur x
  sinon
    si $x < label(A)$ **alors**
      `Insert`(x, FilsGauche(A))
    sinon
      `Insert`(x, FilsDroit(A))
    fin
  fin
fin

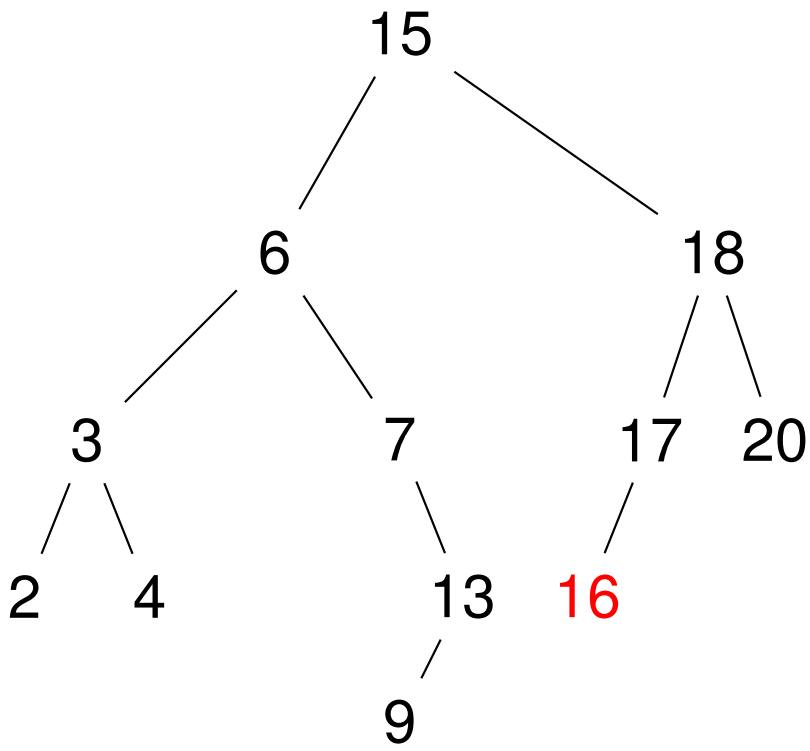
Ajouter un élément à un ABR



Problème

- Traditionnellement `NULL` n'est pas un nœud
- On aura une fonction à trois paramètres
  - x : valeur à insérer
  - A : nœud courant (peut-être `NULL`)
  - B : père du nœud courant
- On appellera `Insert`(x,`Racine`,`NULL`)
- On doit (?) aussi traiter le cas où l'arbre est vide au départ
- Bref, c'est un peu plus compliqué

Ajouter un élément à un ABR

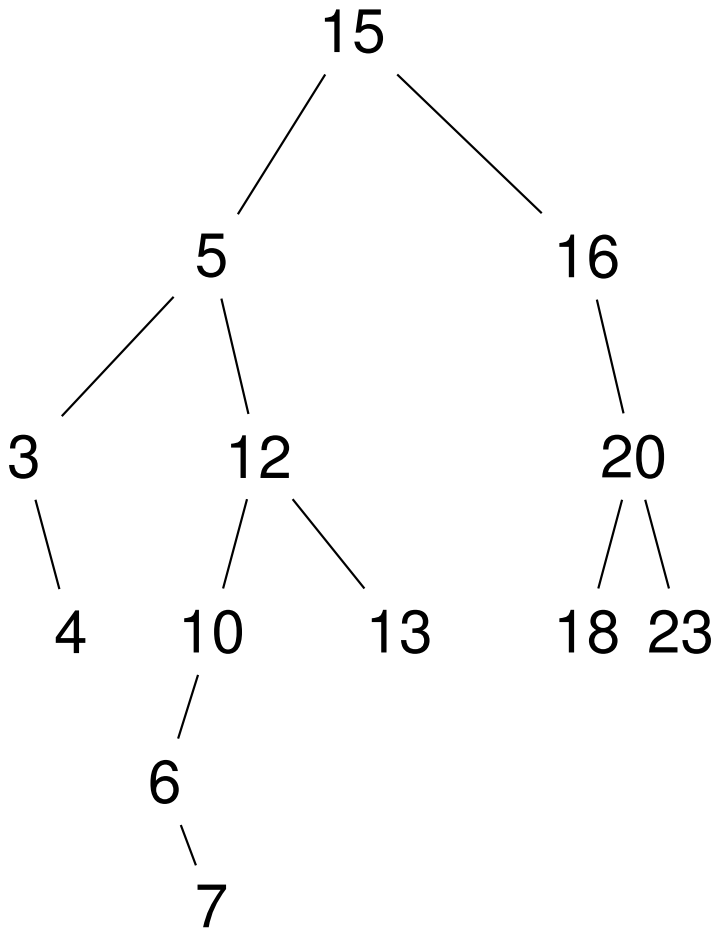


Insertion

Fonction `Insert` (x, A, B)

```
début
    si A = NULL alors
        si B = NULL alors
            CréerABR(x, NULL, NULL)
        sinon
            si x < label(B) alors
                Donner à FG(B) la valeur x
            sinon
                Donner à FD(B) la valeur x
            fin
        fin
    sinon
        si x < label(A) alors
            Insert(x, FG(A),A)
        sinon
            Insert(x, FD(A),A)
        fin
    fin
fin
```

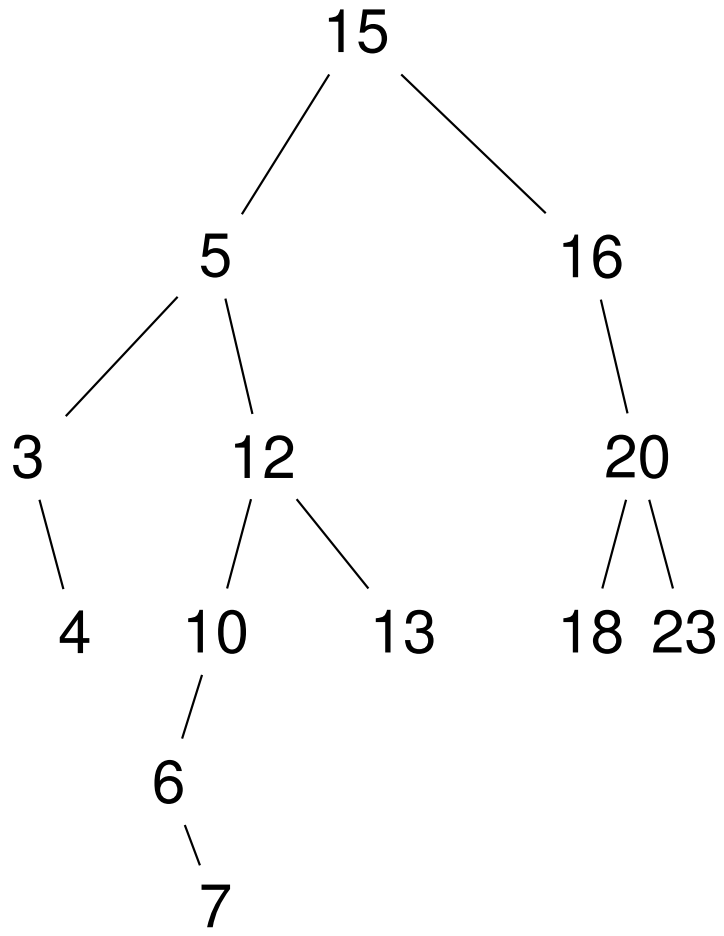
Pour aller plus loin



Question

- Comment supprimer un nœud dans un ABR ?

Pour aller plus loin



Trois cas

- Si le nœud à supprimer est une feuille (par exemple 13) $\rightsquigarrow$ facile
- Si le nœud à supprimer n'a qu'un seul fils (par exemple 16 ou 10) $\rightsquigarrow$ facile
- Si le nœud à supprimer a deux fils (par exemple 5) $\rightsquigarrow$ moins facile...

ABR vs. dichotomie

Recherche dichotomique dans un tableau trié

Valeur	2	3	4	6	7	9	13	15	17	18	20
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Ce tableau T contient-il la valeur 13 entre les indices 0 et 10 ?
- Je me place au milieu du tableau : indice $0 + \lfloor \frac{10-0}{2} \rfloor = 5$ et valeur $T[5] = 9$
- On a $9 < 13 \rightsquigarrow$ chercher la valeur 13 entre les indices $5 + 1 = 6$ et 10 du tableau
- Etc.

ABR vs. dichotomie

Ajouter un élément dans un tableau trié

Valeur	2	3	4	6	7	9	13	15	17	18	20
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Valeur	2	3	4	6	7	9	13	16	15	17	18	20
Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Ajouter la valeur 16 aux valeurs du tableau T ?
- Je crée un tableau T' avec une case de plus
- Je commence à recopier le tableau T dans le tableau T' à partir de l'indice 0
- Lorsque j'atteins la position où doit se trouver 16, je l'insère
- Je finis de recopier T dans T'

ABR vs. dichotomie

Questions de structures de données

- Tableau : structure de données statique
- Arbre : structure de données dynamique

Questions de complexité

- Tableau trié
  - Le nombre d'opérations élémentaires requis par la plupart des algorithmes est proportionnel au nombre d'éléments du tableau
- Arbre binaire de recherche
  - Le nombre d'opérations élémentaires requis par la plupart des algorithmes est proportionnel à la hauteur de l'arbre

FIN