Problème de stockage d'énergie

Dans le but de fournir de la chaleur pour le chauffage durant l'hiver, une ville du Danemark stocke 75 000 m^3 d'eau dans une réserve et la chauffe à 70°C durant l'été à l'aide de capteurs solaires.

En tenant compte des pertes de chaleur au travers de l'isolant thermique, et en considérant que la température extérieure est constante égale à 2°C, la température de l'eau à partir du mois d'août est modélisée par l'équation différentielle :

$$(E) : 145\,610\,776T' + T = 2$$

où T est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ qui donne la température de l'eau stockée en fonction du temps t en secondes.
Le temps $t = 0$ est fixé au 1$^{\text{er}}$ septembre.

Partie A

1. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'équation $(E_0) : 145\,610\,776T' + T = 0$

2. Déterminer une fonction constante T_1 solution de l'équation (E).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la solution particulière T de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale : $T(0) = 70$.

Partie B

On considère la fonction T définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(t) = 68e^{\frac{-1}{145610776}t} + 2$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction T sur $[0\,;+\infty[$

2. Si les conditions extérieures restent les mêmes, à partir de quel moment la température de l'eau dans le réservoir sera-t-elle inférieure à 65°C ?
   On donnera le résultat en mois et jours. (expliquer votre méthode).

Partie C

A partir du 1er octobre (soit 2592×10^3 secondes après le 1er septembre), la municipalité utilise la réserve de chaleur pour chauffer les habitations d'un quartier de 200 appartements de 100m² en moyenne soit 20 000 m².

Ce quartier a une consommation énergétique moyenne de 100 KW/m²/an.

La température du réservoir baisse de 2×10^{-6} °C par seconde (hors perte de chaleur à travers l'isolant).
Cette température est alors définie par la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(t)=68e^{\frac{-1}{145610776}\left(t+2592\times10^{3}\right)}-2\times10^{-6}t+2$$

où t est le temps en seconde passé depuis le 1er octobre.

1. Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de la fonction *f*.

```
1 diff(68*exp((-1/145610776)*(t+2592*10^3))-2*10^(-6)*t+2,t)
```

$$-\frac{1}{500000}-\frac{17*\exp\left(-\frac{t+2592000}{145610776}\right)}{36402694}$$

En s'aidant de ce résultat, justifier que la température diminue dans le réservoir.

2. Compléter le tableau suivant :

Temps t (en s)	0	86400 (1 jour)	604 800 (7 jours)	2 592.10³ (1 mois)	…………….. (2 mois)	…………… (3 mois)	…………… (6 mois)
Température *f(t)* (en °C)	68,8						

3. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran de votre calculatrice pour $t \in [0 ; 15552.10^3]$.

4. L'utilisation du réservoir comme source d'énergie est rentable tant que la température de l'eau reste supérieure à 40°C.
A l'aide du graphique, déterminer à partir de quel mois ne peut-on plus utiliser ce système de chauffage ?