CORRIGE DE L'EPREUVE FINALE

1 Mise en route

Un nombre divisible par 5 finit par un 0 ou un 5. Ici, il devra donc finir par un 0.
La somme des chiffres d'un nombre divisible par 3 est divisible par 3. Notre nombre cherché ne doit donc être ni composé d'un seul 1, ni deux 1. Il est donc composé d'au moins trois 1.
1110 est divisible par 3 et 5, et c'est le plus petit pour les raisons évoquées précédemment.

2 Le partage des pirates

Soit n le nombre de pièces.
On a n = 17k + 3, n = 11k' + 4 et n = 6k''+5, k, k' et k'' étant des entiers naturels.
On a donc, entre autre, 11k' = 17k – 1
En programmant f(x) = 17x – 1 à la calculatrice, on cherche les multiples de 11 inférieurs à 996.
On trouve 33, 220, 594, 781.
Si 17 k -1 = 33, alors k = 2, n = 37, mais 37 ne convient pas pour 6k'' + 5
Si 17 k -1 = 220, alors k = 13, n = 224, mais 224 ne convient pas pour 6k'' + 5.
Si 17 k – 1 = 594, alors k = 35, n = 598, mais 598 ne convient pas pour 6k'' + 5
Si 17 k – 1 = 781, alors k = 46, n = 785, ce qui convient car 6k'' + 5 = 785 donne k'' = 130.
Il y avait donc 785 pièces.

3 Les steaks

a) Il est clair que si l'on commence par cuire les steaks A et B ensemble pendant une minute, puis qu'on les retourne et qu'on les fait cuire à nouveau ensemble une minute, ces deux steaks seront alors cuits à souhait pour un temps total de deux minutes. Il suffit alors de faire cuire les steaks C et D de la même façon pour obtenir nos quatre steaks cuits, pour un total de quatre minutes.

b) Il est facile de vérifier que l'on peut adopter la stratégie du a) pour un nombre pair quelconque de steaks. Mais, pour un nombre impair cela ne fonctionne plus. Notons A, B, C, D, E les cinq steaks. Les faces du steak A sont notées A1 et A2, et on adopte des notations similaires pour les autres steaks. Pour atteindre l'objectif souhaité, on peut alors utiliser la procédure suivante : on fait cuire une minute chacune des paires de faces A2, B1, puis B2, C1, puis C2, D1, puis D2, E1, puis E2, A1.

4 Les carrés

1. Un exemple

4	3	1	2	5
5	1	2	4	3
2	5	3	1	4
3	2	4	5	1
1	4	5	3	2

2. Le *score* peut-il être 20 ?

5				
	5			
		5		
			5	

Le dernier 5 ne trouve aucune place sur la diagonale principale.

3. Le *score* peut-il être 19 ? (premier cas)

				5
5				
	5			
		5		
			4	

Le 5 de la diagonale secondaire a été placé dans la seule case possible. Il ne reste aucune place pour le dernier 5.

3. Le *score* peut-il être 19 ? (suite)

5				
	5			
		4		
			5	

Le 5 de la première diagonale ne trouve pas de place. Pour des raisons de symétrie, les deux autres positions du 4 sont éliminées. Idem pour un *score* 18 réalisé avec trois 5 et un 3

3. Le *score* peut-il être 18 ? (premier cas)

				5
5				
	5			
		4		
			4	

On place le 5 de la diagonale secondaire au seul endroit possible. C'était aussi le seul endroit possible pour le 4 de cette diagonale.

3. Le *score* peut-il être 18 ? (suite)

4	5			
5			4	
	4	5		
		4		5
			5	

Le 5 de la diagonale principale n'a qu'une place possible. Il n'y a qu'une possibilité pour les deux autres 5. Il reste deux places pour le 4 de la diagonale principale, mais l'ensemble est symétrique par rapport à la diagonale secondaire. Une fois ce 4 placé, il ne reste qu'une case pour le quatrième 4, mais plus pour le cinquième.

3. Le *score* peut-il être 18 ? (fin)

5				
	4			
		5		
			4	5

Une fois placé le 5 de la diagonale principale à la seule place possible, il ne reste rien pour le 5 de la diagonale secondaire…

Conclusion : Toutes les dispositions ont été examinées pour la sous-diagonale, aux symétries près. Elle doit donc faire apparaître trois chiffres distincts.

Comme le montre le tableau donné comme exemple pour répondre à la question **1.**, un *score* 17 est possible. C'est le *score* maximum.

5 Les pages du livre

Soit n le nombre de pages du livre ; la somme de leurs numéros est égale à $n(n+1)/2$.
Les numéros des deux pages collées entre elles sont, dans l'ordre, pair et impair, et nous les notons $2k$ et $2k+1$. La somme des deux est donc égale à $4k+1$.
On a les conditions suivantes sur k et n : $2 \leq 2k < 2k+1 \leq n$,
qui expriment que les deux pages collées appartiennent au livre.
L'énoncé précise que $n(n+1)/2=4k+1+2003=4k+2004$.
L'entier n doit donc satisfaire les deux inéquations :
$n(n+1)/2 \geq 2008$,
et $n(n+1)/2 \leq 2(n-1)+2004$ ou $n(n-3)/2 \leq 2002$.
La première est équivalente à $n \geq 63$. En effet, la fonction qui à n associe $n(n+1)/2$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, et si $n \leq 62$, alors $n(n+1)/2 \leq 1953$, tandis que, pour $n = 63$, on trouve $n(n+1)/2 = 2016$. Pour des raisons analogues, la seconde inéquation est équivalente à $n \leq 64$.
Finalement, on a soit $n=63$, soit $n=64$, et, dans les deux cas, en choisissant convenablement k :
$n(n+1)/2 = 4k+2004$.
Pour $n=63$, on a $63 \times 64/2= 2016= 4k+2004$ avec $k=3$, $2k=6$ et $2k+1= 7$:
le livre compte 63 pages et ce sont les pages 6 et 7 qui sont collées entre elles.
Pour $n=64$, $64 \times 65/2= 2080=4k+2004$ avec $k=19$, $2k=38$ et $2k+1=39$:
le livre compte 64 pages et ce sont les pages 38 et 39 qui sont collées entre elles.

6 Beach volley

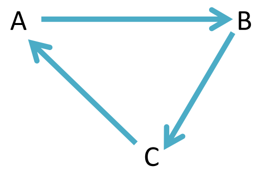
Conventions de notation :

A  B signifie A ne veut pas jouer avec B

A B signifie A et B peuvent jouer ensemble.

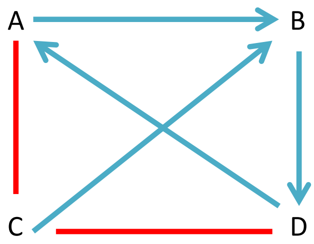
Pour former une équipe de deux joueurs toujours compatibles :

- Il est immédiat que deux joueurs ne suffisent pas
- Si il y a 3 joueurs, la configuration suivante montre que cela ne suffit pas :



- Par contre 4 joueurs suffisent :

Illustration :

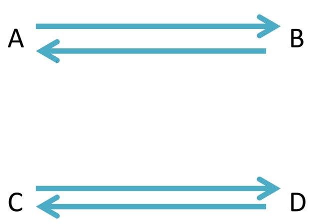


Dans cet exemple, on peut former deux équipes : soit C et A, soit C et D

Justification :
On peut joindre de 6 façons différentes deux joueurs.
Il y a au maximum 4 liaisons bleues.
Il reste donc au moins 2 liaisons rouges montrant qu'avec 4 joueurs on peut toujours trouver au moins deux couples prêts à jouer ensemble.

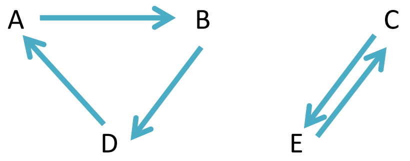
Pour former une équipe de trois joueurs toujours compatibles :

- Il est immédiat que 3 joueurs ne suffisent pas.
- Configuration qui montre que 4 joueurs ne suffisent pas :



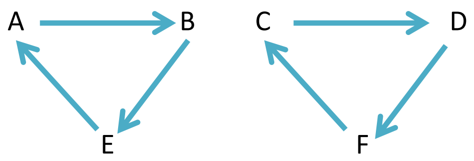
Un joueur parmi A et B peut jouer avec un joueur parmi C et D, mais on ne peut pas trouver un troisième joueur car il serait toujours incompatible avec l'un des deux premiers choisis.

- Configuration qui montre que 5 joueurs ne suffisent pas :



D’après la première question, on ne peut pas trouver deux joueurs compatibles parmi A, B et D, ni parmi C et E. Il faut donc choisir un joueur parmi A, B et D et un second parmi E et C. Le choix d’un troisième joueur compatible avec les deux premiers est alors impossible.

- Configuration qui montre que 6 joueurs ne suffisent pas :

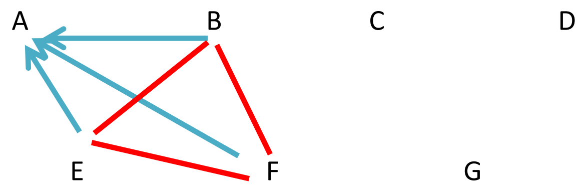


Comme précédemment, on ne peut choisir qu’un joueur parmi A, B et E et un joueur parmi C, D et F et il n’est pas possible de trouver un troisième joueur compatible.

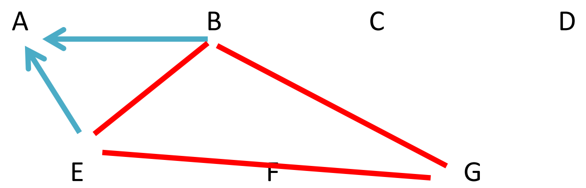
On peut toujours former une équipe de 3 avec 7 joueurs :

On nomme A, B, C, D ,E ,F et G les 7 joueurs.

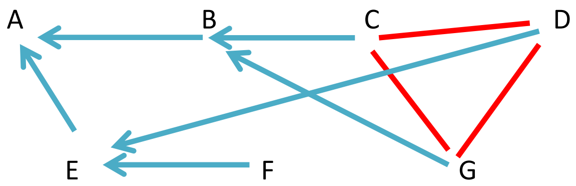
- Si trois joueurs ne veulent pas jouer avec le même joueur, A par exemple, ils peuvent joueur ensemble tous les trois et former une équipe. On suppose dans la suite qu’il n’y a jamais plus de deux joueurs qui ne veulent pas jouer avec le même joueur.



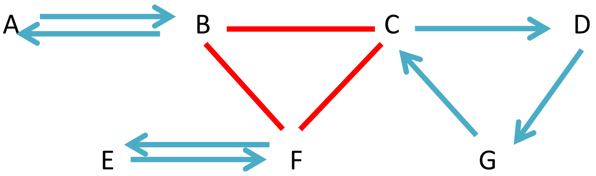
- Si deux joueurs, par exemple B et E ne veulent pas jouer avec le joueur A, ils peuvent jouer ensemble et acceptent de jouer avec n’importe quel autre joueur D, E, F, G.
  Parmi ces 4 joueurs, soit l’un accepte de jouer avec B et C, et il permet de compléter l’équipe :



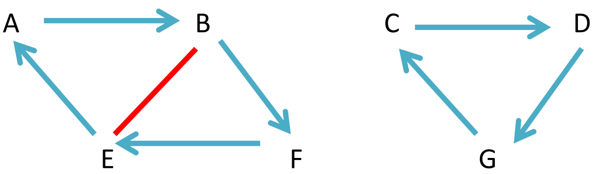
Soit les uns ne veulent pas jouer avec B et les autres ne veulent pas jouer avec C et il y en a exactement 2 dans chaque cas (car on a éliminé précédemment les autres cas).
Mais alors on peut choisir trois joueurs parmi E, F ,G et H qui acceptent de jouer ensemble puisqu'ils ne refusent que B ou C.



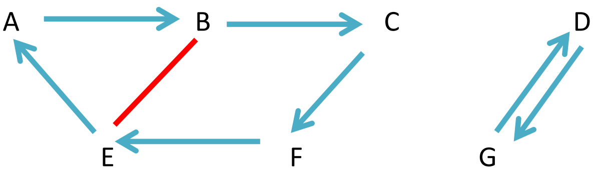
- Si il n'y a qu'un seul joueur qui refuse de joueur avec un joueur donné, ils se répartissent en plusieurs cycles selon les différentes configurations suivantes :

1) 

Un joueur de chaque cycle convient

2) 

On prend deux joueurs compatibles parmi A, B, E, F, et un joueur parmi C, D et G.

3) 

On prend deux joueurs compatibles parmi A, B, C, E, F, et un joueur parmi D et G.