

Équivalence et détermination

Malika More
(malika.more@u-clermont1.fr)

IREM Clermont-Ferrand

Formation ISN

02 février 2012

Plan du cours

1 Automates équivalents

2 Détermination

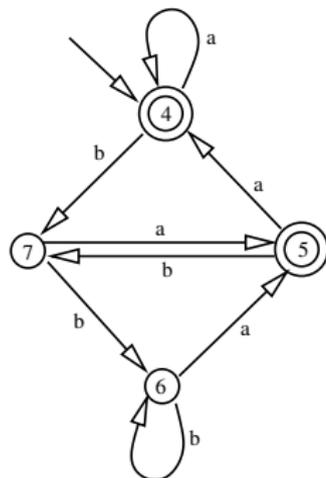
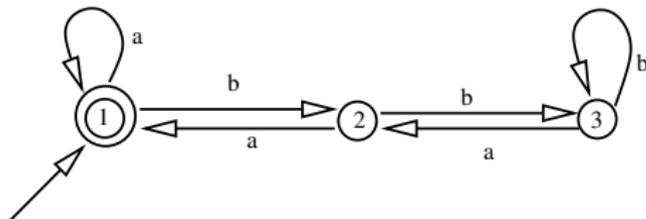
1 Automates équivalents

2 Détermination

Exemple

Question

Les automates \mathcal{A} et \mathcal{A}' acceptent-ils le même langage ?



Exemple

Question

Les automates \mathcal{A} et \mathcal{A}' acceptent-ils le même langage ?

- Si non :
 - il existe un mot accepté par \mathcal{A} et rejeté par \mathcal{A}'
 - ou il existe un mot rejeté par \mathcal{A} et accepté par \mathcal{A}'
- Si oui :
 - tous les mots acceptés par \mathcal{A} sont aussi acceptés par \mathcal{A}'
 - et tous les mots rejetés par \mathcal{A} sont aussi rejetés par \mathcal{A}'

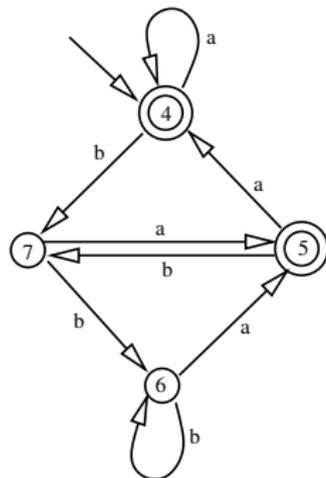
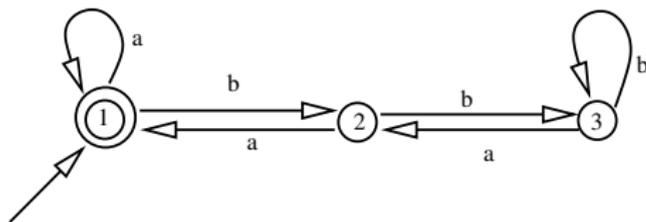
Idée générale

Définition

Deux automates qui acceptent le même langage s'appellent des automates **équivalents**

- Pour prouver que \mathcal{A} et \mathcal{A}' ne sont pas équivalents, il suffit de trouver un mot accepté par l'un et rejeté par l'autre
- Pour prouver que \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalents, on doit montrer qu'ils acceptent exactement les mêmes mots (ce qui paraît plus difficile)

Exemple (2)



Le mot bba est rejeté par \mathcal{A} et accepté par \mathcal{A}'

Conclusion : \mathcal{A} et \mathcal{A}' ne sont pas équivalents

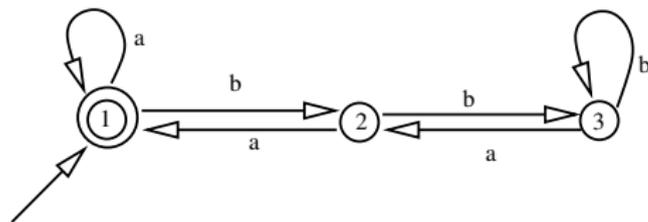
Méthode pour les automates déterministes

- On suit des chemins "parallèles" dans les deux automates **déterministes** \mathcal{A} et \mathcal{A}' .
- Si on rencontre un couple d'états (q, q') avec q acceptant et q' non acceptant (ou le contraire), alors on a trouvé un mot w accepté par \mathcal{A} et rejeté par \mathcal{A}' (ou le contraire). Donc \mathcal{A} et \mathcal{A}' ne sont pas équivalents.
- Il n'y a qu'un nombre fini de couples d'états (q, q') , donc le calcul se termine au bout d'un temps fini.
- Si le calcul se termine sans avoir trouvé un mot w accepté par \mathcal{A} et rejeté par \mathcal{A}' (ou le contraire), alors les deux automates \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalents, c.-à-d. ils acceptent le même langage.

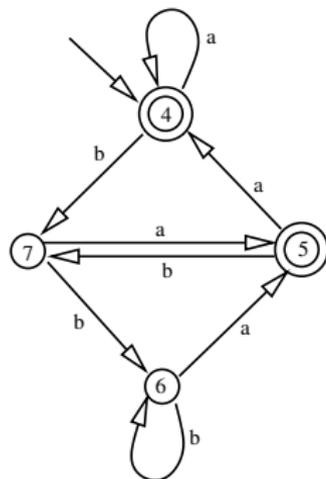
Méthode pour les automates déterministes

- On suit des chemins "parallèles" dans les deux automates **déterministes** \mathcal{A} et \mathcal{A}' .
- Si on rencontre un couple d'états (q, q') avec q acceptant et q' non acceptant (ou le contraire), alors on a trouvé un mot w accepté par \mathcal{A} et rejeté par \mathcal{A}' (ou le contraire). Donc \mathcal{A} et \mathcal{A}' ne sont pas équivalents.
- Il n'y a qu'un nombre fini de couples d'états (q, q') , donc le calcul se termine au bout d'un temps fini.
- Si le calcul se termine sans avoir trouvé un mot w accepté par \mathcal{A} et rejeté par \mathcal{A}' (ou le contraire), alors les deux automates \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalents, c.-à-d. ils acceptent le même langage.

Exemple (3)

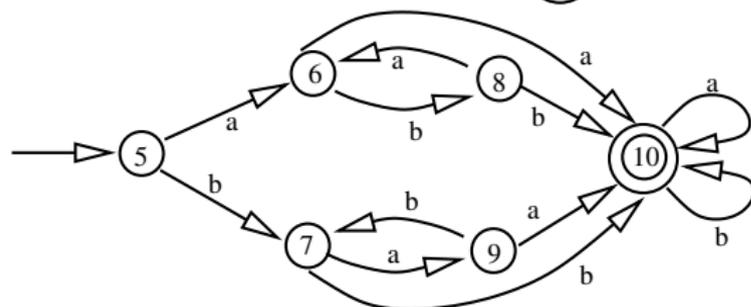
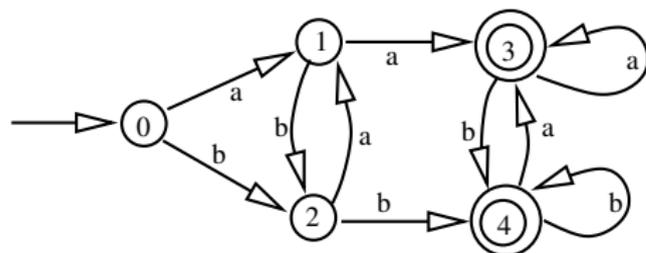


	<i>a</i>	<i>b</i>
(<u>1</u> , <u>4</u>)	(<u>1</u> , <u>4</u>)	(2, 7)
(2, 7)	(<u>1</u> , <u>5</u>)	(3, 6)
(<u>1</u> , <u>5</u>)	(<u>1</u> , <u>4</u>)	(2, 7)
(3, 6)	(2, 5)	...

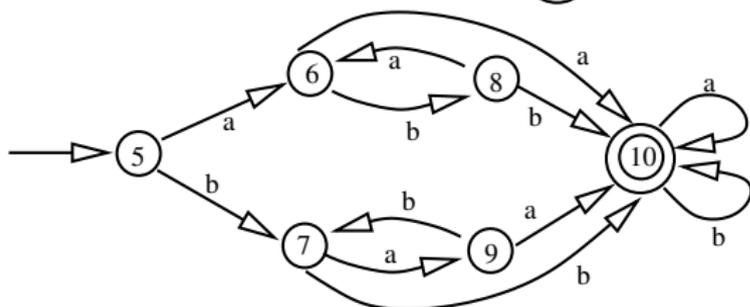
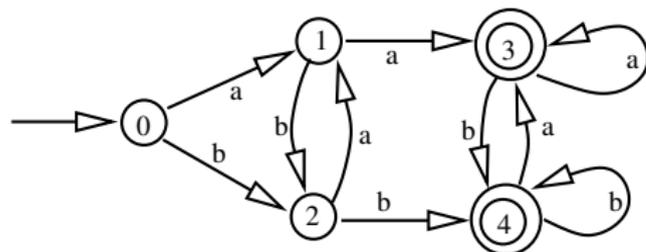


En remontant le calcul, on s'aperçoit que le mot *bba* est rejeté par \mathcal{A} et accepté par \mathcal{A}'

Autre exemple

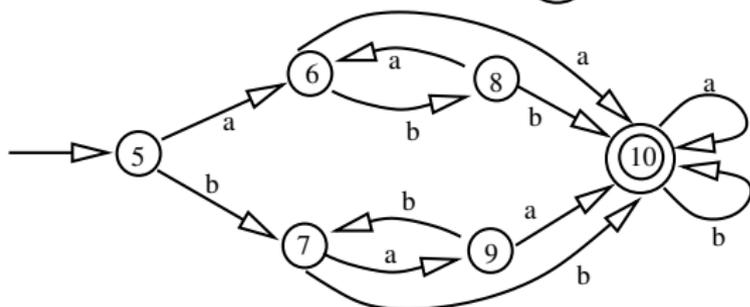
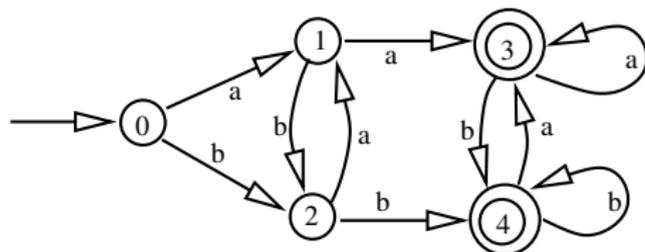


Autre exemple



	<i>a</i>	<i>b</i>
(0, 5)	(1, 6)	(2, 7)
(1, 6)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(2, 8)
(2, 7)	(1, 9)	((<u>4</u> , <u>10</u>))
(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>4</u> , <u>10</u>)
(2, 8)	(1, 6)	(<u>4</u> , <u>10</u>)
(1, 9)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(2, 7)
(<u>4</u> , <u>10</u>)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>4</u> , <u>10</u>)

Autre exemple

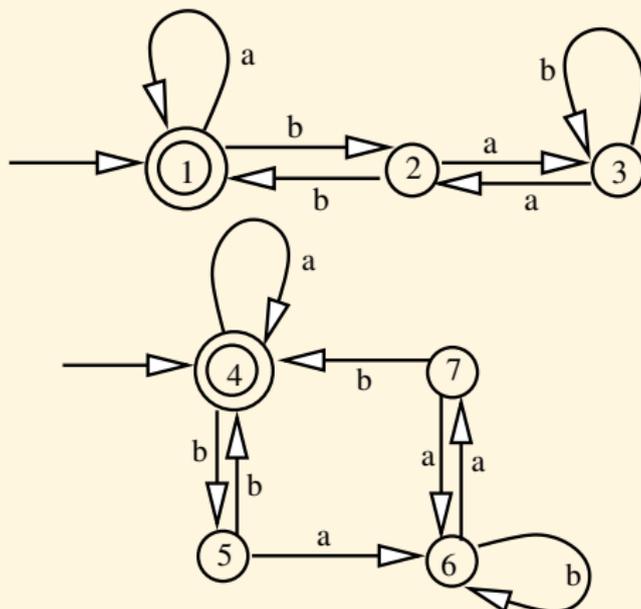


	<i>a</i>	<i>b</i>
(0, 5)	(1, 6)	(2, 7)
(1, 6)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(2, 8)
(2, 7)	(1, 9)	((<u>4</u> , <u>10</u>))
(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>4</u> , <u>10</u>)
(2, 8)	(1, 6)	(<u>4</u> , <u>10</u>)
(1, 9)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(2, 7)
(<u>4</u> , <u>10</u>)	(<u>3</u> , <u>10</u>)	(<u>4</u> , <u>10</u>)

Le calcul se termine sans trouver de mot qui sépare les deux automates, donc ils sont **équivalents**.

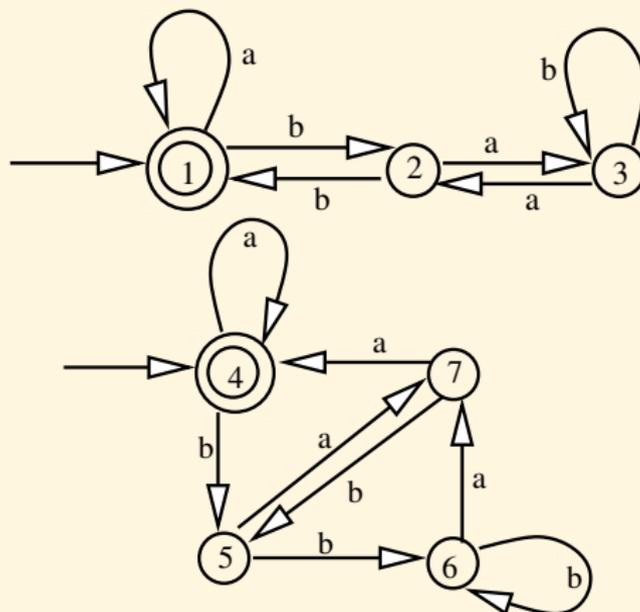
Exercice 1

Les automates ci-dessous sont-ils équivalents ?



Exercice 2

Les automates ci-dessous sont-ils équivalents ?



1 Automates équivalents

2 Détermination

Non-déterminisme

Définition

Un automate est **déterministe** si pour tout état et toute lettre de l'alphabet, il y a au plus une transition étiquetée par cette lettre qui part de cet état.

Sinon, c'est un automate **non-déterministe**.

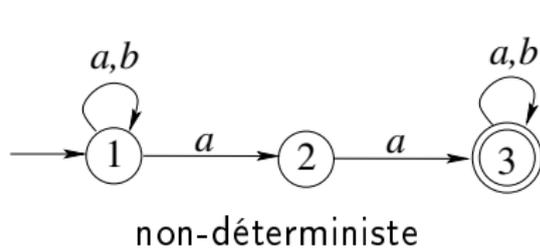
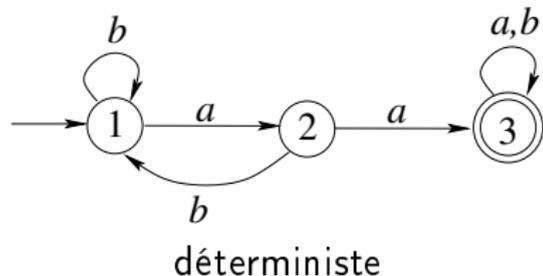
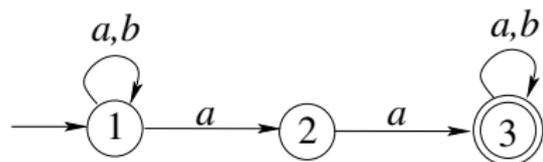


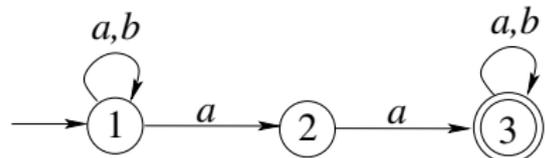
Table de transition d'un automate non-déterministe



	<i>a</i>	<i>b</i>
1	1, 2	1
2	3	
3	3	3

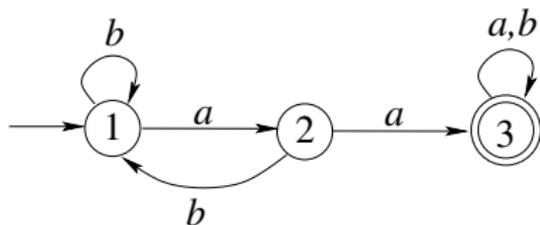
- À partir de l'état 1, en lisant la lettre *a*, on peut atteindre l'état 1 OU l'état 2

Exemple



Cet automate non-déterministe reconnaît le langage $L = \{\text{mots contenant deux } a \text{ consécutifs}\}$

Cet automate déterministe reconnaît le même langage L



Question

Existe-t-il toujours un automate déterministe qui accepte le même langage qu'un automate non-déterministe donné ?

Détermination

Question

Existe-t-il toujours un automate déterministe qui accepte le même langage qu'un automate non-déterministe donné ?

Réponse

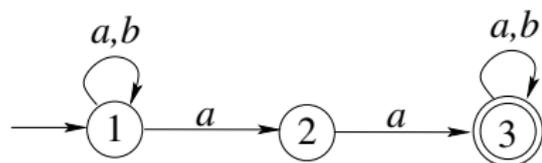
À partir d'un automate non-déterministe qui reconnaît un langage L , on peut toujours calculer un automate **déterministe** qui reconnaît le même langage L .

Idée générale

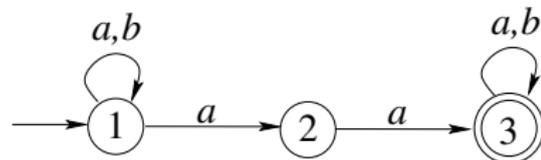
L'automate déterministe que l'on va construire sera composé de *super-états* qui vont *simuler* des ensembles d'états de l'automate initial. La méthode utilisée est la suivante :

- le *super-état* initial est formé de l'état initial ;
- le *super-état* S' issu d'un *super-état* S en appliquant une transition t est formé de l'ensemble des états obtenus en appliquant la transition t à partir de chacun des états formant S ;
- le ou les *super-états* acceptants sont les *super-états* contenant au moins un état final.

Mise en œuvre

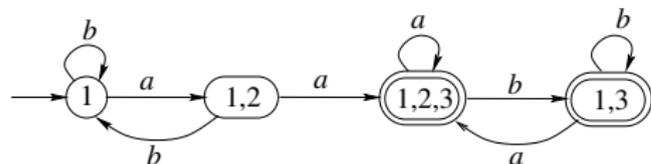
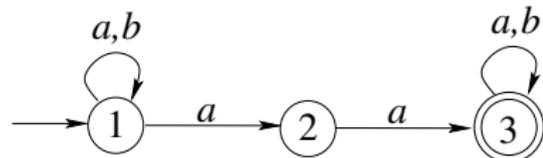


Mise en œuvre



<i>super-états</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
$\rightarrow\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$
<u>$\{1,2,3\}$</u>	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$
<u>$\{1,3\}$</u>	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$

Mise en œuvre



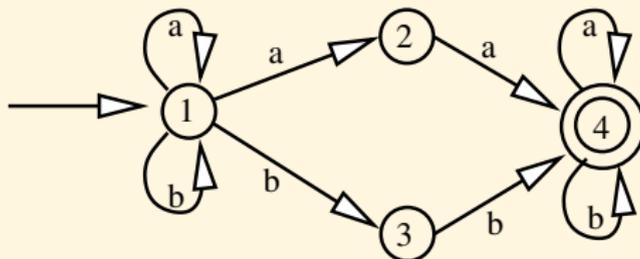
<i>super-états</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
$\rightarrow\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$
<u>$\{1,2,3\}$</u>	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$
<u>$\{1,3\}$</u>	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$

Remarques

- Les automates non-déterministes sont aussi naturels et acceptables que les automates déterministes
- Mais il arrive qu'on soit obligé de déterminer un automate (par exemple avant d'utiliser la méthode « automates équivalents »), c'est pourquoi vous devez savoir le faire
- Les états de l'automate déterministe obtenu correspondent à des ensembles d'états de l'automate de départ, il peut donc arriver qu'ils soient très nombreux (jusqu'à 2^n , si n est le nombre d'états de l'automate non-déterministe)

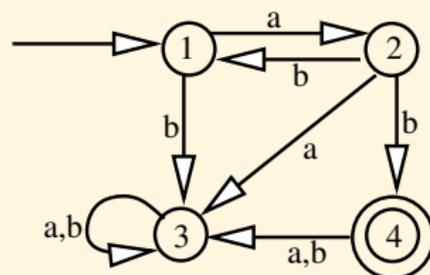
Exercice 3

Déterminer l'automate ci-dessous.



Exercice 4

Déterminer l'automate ci-dessous.



FIN