

ESSENTIEL 1 : Savoir démontrer par récurrence...

...que « pour tout $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie ».

Enoncé : Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Solution : $P(n)$ désigne la proposition « pour tout entier $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$ ».

1^{ère} étape : initialisation

On vérifie que $P(10)$ est vraie.

$2^{10} = 1024$ et $100 \times 10 = 1\,000$ donc $2^{10} \geq 100 \times 10$ et $P(10)$ est vraie.

2^{ème} étape : Hérédité.

On **suppose** que pour **un** entier naturel $k \geq 10$, $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $2^k \geq 100k$ (c'est ce qu'on appelle hypothèse de récurrence).

On **démontre** qu'alors $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $2^{k+1} \geq 100(k+1)$.

Or $2^{k+1} = 2^k \times 2$, en utilisant l'hypothèse de récurrence : $2^{k+1} \geq 2 \times 100k$

c'est-à-dire $2^{k+1} \geq 100k + 100k$

De $k \geq 10$, on en déduit $100k \geq 1000$ et donc en particulier $100k \geq 100$

D'où $2^{k+1} \geq 100k + 100$, c'est-à-dire $2^{k+1} \geq 100(k+1)$ donc $P(k+1)$ est vraie

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 10$ et est héréditaire donc pour tout entier $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

...qu'une suite est monotone.

Rappels des méthodes.

Pour étudier le sens de variation d'une suite u , on peut :

- Etudier algébriquement le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- Si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$;
- Si tous les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;
- Utiliser un raisonnement par récurrence.

Enoncé : La suite u est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

Démontrer par récurrence que cette suite est croissante.

Solution : On note $P(n)$ la proposition « Pour tout naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ ».

1^{ère} étape : initialisation

$P(0)$ est vraie car $u_0 \leq u_1$, en effet $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{5}$.

2^{ème} étape : Hérédité.

On **suppose** que pour **un** entier naturel k , $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \leq u_{k+1}$.

Alors $u_k + 5 \leq u_{k+1} + 5$ et $\sqrt{u_k + 5} \leq \sqrt{u_{k+1} + 5}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ et $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$. La suite u est croissante.

+ Consulter également l'exercice résolu n°1 de votre livre page 61.