Intégrale de Fresnel

Corrigé du sujet d'analyse du concours de l'agrégation interne 1994

L'idée est la suivante (informellement, aucune des transformations n'est justifiée) : pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}} dx$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}} dx \right) dt$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\alpha - t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{\alpha.x} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{u}}{\sqrt{u}} du \right) dx$$

et on sait calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(\alpha - t)} dt$

Intégrabilité de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\dfrac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}}$ dans le cas $Re(\alpha) \leq 0$.

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\dfrac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}}$ est continue.

Son module est égal à $\dfrac{e^{Re(\alpha).x}}{\sqrt{x}}$

$\star$ qui est inférieur à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $]0;1]$.
$\star$ qui est inférieur à $e^{Re(\alpha).x}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty[$ pour $Re(\alpha) \neq 0$.

Cette fonction est donc intégrable sur $]0;+\infty[$ pour $Re(\alpha) \neq 0$.

Dans la cas où $Re(\alpha) = 0$, il ne semble pas possible de montrer l'intégrabilité[1] ; on va donc montrer la convergence de l'intégrale par une intégration par partie destinée à accroître l'exposant du dénominateur.

$$\int_1^x \frac{e^{\alpha.t}}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{e^{\alpha.x}}{\alpha\sqrt{x}} - \frac{e^{\alpha}}{\alpha} \right] + \frac{1}{2\alpha} \int_1^x \frac{e^{\alpha.t}}{t^{3/2}} dt$$

Le module de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\dfrac{e^{\alpha.t}}{t^{3/2}}$ est égal à $\dfrac{e^{Re(\alpha).x}}{t^{3/2}}$ qui, pour $Re(\alpha) \leq 0$, est inférieur à $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty[$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{\alpha.t}}{t^{3/2}} dt$ a donc une limite.
Quand x tend vers l'infini, $\dfrac{e^{\alpha.x}}{\alpha\sqrt{x}}$ a un module égal à $\dfrac{Re(\alpha).x}{\alpha\sqrt{x}}$ qui tend vers 0.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{\alpha.t}}{\sqrt{t}} dt$ a donc une limite[2].

---

1. En fait, on peut même démontrer que a fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\dfrac{e^{iIm(\alpha)x}}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable, par

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{sin(t)}{t} \right| dt \geq \int_{(k+\frac{1}{4})\pi}^{(k+\frac{3}{4})\pi} \left| \frac{sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(k+\frac{3}{4})\pi}$$

ou par

$$\int_1^x \left| \frac{sin(t)}{t} \right| dt \geq \int_1^x \frac{sin^2(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1 - cos(2t)}{2t} dt = \int_1^x \frac{1}{2t} dt - \int_1^x \frac{cos(2t)}{2t} dt$$

2. On aurait pu simplifier ce dernier passage en se limitant au cas $Re(\alpha) = 0$. Cependant le preuve vaut pour $Re(\alpha) \leq 0$ et permet d'obtenir la limite sans distinguer les deux cas comme proposé par le sujet : cette distinction montre que le cas général correspond à une intégrabilité alors que le cas particulier ne correspond qu'à une convergence de l'intégrale.

Définition des intégrales sur un compact [3] $\left[\dfrac{1}{p};p\right]\times\left[\dfrac{1}{n};n\right]$

La fonction définie sur $\left[\frac{1}{p};p\right]\times]0;+\infty[$ par $h_1(t,x)=\dfrac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}}$ est continue donc $g_p(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{p}}^{p}h_1(t,x)dt$ est définie continue sur $]0;+\infty[$.
La fonction définie sur $]0;+\infty[\times\left[\frac{1}{n};n\right]$ par $h_2(t,x)=\dfrac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}}$ est continue donc $f_n(t)=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}h_2(t,x)dx$ est définie continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction définie sur $\left[\frac{1}{p};p\right]\times\left[\frac{1}{n};n\right]$ par $h_3(t,x)=\dfrac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}}$ est continue donc

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\frac{1}{p}}^{p}h_3(t,x)dt\right)dx=\int_{\frac{1}{p}}^{p}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n}h_3(t,x)dx\right)dt$$

Il va maintenant falloir passer aux limites.

• Pour n fixé, on passe à la limite quand p tend vers l'infini dans $\displaystyle\int_{\frac{1}{p}}^{p}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n}h(t,x)dx\right)dt$: [4]
Il suffit de démontrer que $f_n(t)$ a une intégrale convergente sur $]0;+\infty[$.
Or on sait calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}}dx=\frac{e^{(\alpha-t)n}-e^{(\alpha-t)\frac{1}{n}}}{\sqrt{t}(\alpha-t)}$ (rappelons que α ne peut être un réel positif), [5] et par la majoration facile $|f_n(t)|\leq\frac{2}{\sqrt{t}(\alpha-t)}$ et l'intégrabilité facile de la fonction définie par $\frac{2}{\sqrt{t}(\alpha-t)}$ sur $]0;+\infty[$, on a lintégrabilité de f_n sur $]0;+\infty[$.

• Pour n fixé, on passe à la limite quand p tend vers l'infini dans $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\frac{1}{p}}^{p}h(t,x)dt\right)dx$: [6] :
$g_p(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{p}}^{p}\frac{e^{(\alpha-t)x}}{\sqrt{t}}dt=e^{\alpha.x}\int_{\frac{1}{p}}^{p}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt=\frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}\int_{\frac{x}{p}}^{xp}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}F(-1).$
La convergence est uniforme sur tout intervalle $[a;b]$, avec $0<a<b$:
$\displaystyle\left|g_p(x)-\frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}F(-1)\right|=\frac{|e^{\alpha.x}|}{\sqrt{x}}\left|\int_0^{\frac{x}{p}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du+\int_{xp}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right|\leq\frac{e^{Re(\alpha).a}}{\sqrt{a}}\left(\int_0^{\frac{a}{p}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du+\int_{Ap}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right)$
qui est un majorant ne dépendant pas de x et tendant vers 0.

On en est à $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}F(-1)dx$

• On passe à la limite quand n tend vers l'infini dans $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}F(-1)dx$ d'après la **question 1.**

• On passe à la limite quand n tend vers l'infini dans $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)dt$en vériufiant un théorème de convergence [7] et la majoration qui fait partie de ses hypothèses [8] :

La convergence :

3. **voir Question 3 du problème.**
4. voir les **questions 4.a) et 4.c)**
5. d'où encore la continuité sur $]0;+\infty[$ déjà obtenue par ailleurs sans calcul
6. voir la **question 5.**
7. **question 2.**
8. **question 4.b)**

Sur tout intervalle $[a;b]$, avec $0 < a < b$, a fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc elle est continue, donc elle est continue sur $]0;+\infty[$.
Par passage à la limite dans les inégalités et continuité de la fonction valeur absolue, on a $|f(t)| \leq m(t)$ pour tout $t > 0$.
La fonction f est donc intégrable sur $]0;+\infty[$.

Avec le théorème de convergence dominée

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence pour tout t_0 (c'est à dire simplement) vers f et toutes les conditions d'application du théorème de convergence dominée sont satisfaites.

Sans le théorème de convergence dominée

L'idée consiste à traiter séparément les "extrémités de l'intervalles" et le "centre" :

$\left|\int_1^{+\infty} f_n(t)dt - \int_1^{+\infty} f(t)dt\right|$ est inférieur à
$\int_0^a |f_n(t)|dt + \int_0^a |f(t)|dt + \int_a^A |f_n(t) - f(t)|dt + \int_A^{+\infty} |f_n(t)|dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|dt$
donc à $2\int_0^a m(t)dt + \int_a^A |f_n(t) - f(t)|dt + 2\int_A^{+\infty} m(t)dt$.
La fonction $m(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc on peut choisir a pour que

$$\int_0^{+\infty} m(t)dt - \int_a^{+\infty} m(t)dt = \int_0^a m(t)dt$$

soit inférieur à $\frac{\epsilon}{5}$
De même on peut choisir A pour que $\int_A^{+\infty} m(t)dt$ soit inférieur à $\frac{\epsilon}{5}$.
Ces choix étant fais, on utilise la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a;A]$ pour choisir N à partir duquel $|f_n(t) - f(t)| \leq \dfrac{\epsilon}{5(A-a)}$. Ainsi le tour est joué.

La majoration :

$f_n(t) = \dfrac{e^{(\alpha-t)n} - e^{(\alpha-t)\frac{1}{n}}}{\sqrt{t}(\alpha-t)}$ conv. unif. vers $\dfrac{1}{\sqrt{t}(\alpha-t)}$ sur tout intervalle $[a;b]$, avec $0 < a < b$:
$\left|f_n(t) - \dfrac{1}{\sqrt{t}(\alpha-t)}\right| \leq \dfrac{|e^{(\alpha-t)n}|}{\sqrt{t}|\alpha-t|} + \dfrac{|1 - e^{(\alpha-t)\frac{1}{n}}|}{\sqrt{t}|\alpha-t|}$

On en est à $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}(\alpha-t)}dt = F(-1)\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{\alpha.x}}{\sqrt{x}}dx$ et il reste à calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}(\alpha-t)}dt$ et $F(-1)$

Calculs de $F(-1)$:

$\star$ On peut utiliser le fait que $F(-1)$ est un nombre clairement poisitf de carré égal à $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$ (voir plus haut)
La fonction définie par u^2 est un difféomorphisme de $]0;+\infty[$ dans lui-même, donc :
$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt = 2\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+u^2}du = \pi$

$\star$ On peut utiliser le fait que $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$ est une variante classique de l'intégrale de Gauss $2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ par un changement de variable évident. Ensuite, soit on connaît l'intégrale de Gauss, soit on connaît une méthode de calcul simple (voir doc. sinus intégral).

Calculs de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t-i)}dt$ par des méthodes évitant l'utilisation de fonctions à variables complexe :

Le début le plus naturel consiste à faire disparaître la racine par le changement de variable adéquat :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t-i)}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-i}dt$$

$\star$ On peut ensuite tenter $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-i}dt = \frac{1}{2\omega}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{u-\omega}dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+\omega}dt\right)$ où $\omega = e^{i\pi/4}$ puis utiliser le fait que $\frac{1}{2}ln[(t^2 - 2Re(z)t + |z|^2) + i\ arctan\left(\frac{t-Re(z)}{Im(z)}\right)$ est une primitive de $\frac{1}{t-z}$ [9]

A partir de là, les calculs sont standards :

$$\int_0^v \left(\frac{1}{u-\omega} - \frac{1}{u+\omega}\right)du = \frac{1}{2}ln\left|\frac{v-\omega}{v+\omega}\right| + i\ arctan\left(\frac{v-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - i\ arctan\left(\frac{v+\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

En passant à la limite dans cette dernière expression, on trouve $i\pi$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t-i)}dt = \pi e^{i\pi/4}$ et $F(i) = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}$.

$\star$ L'autre méthode est plus lourde, mais plus naturelle :

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-i}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1}dt + i\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}dt$ qu'on va calculer par décomposition en éléments simples :

Tant mieux si on voit que $(u^4+1) = (u^2 - u\sqrt{2}+1)(u^2+u\sqrt{2}+1)$ [10]. On a alors

$$\frac{u^2}{u^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right);$$

$$\frac{1}{u^4+1} = \left(\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}u+\frac{1}{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}u-\frac{1}{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right)$$

On écrit une fonction intégrale sur $[0, +\infty$ comme somme de deux fonctions qui ne le sont pas. Il faut intégrer sur $[0; v]$ avant de passer à la limite.

Avant d'arrêter, je rappelle le calcul d'une intégrale du type $\int_0^v \frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}dt$

$$\int_0^v \frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^v \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}dt - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^v \frac{1}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dt$$

$$\int_0^v \frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}dt = \frac{1}{2}ln(v^2+v\sqrt{2}+1) - arctan\left(\sqrt{2}(u+\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$$

Et là j'arrête faute de lecteur encore éveillé. D'ailleurs, il y a peut être déjà des fautes de calcul.

9. il suffira à ceux qui ne me croient pas de dériver pour s'en convaincre. Quant à la façon de trouver, il y a les formulaires, et les calculs informels suivant : on cherche $r + is = ln(t-z)$ soit $e^{r+is} = t - z$ ce qui équivaut à $e^r = |t-z|$ et $s = arg(t-z)$ soit $tan(s) = \frac{-y}{t-x}$ donc $s = arctan(\frac{-y}{t-x}) = arctan(\frac{t-x}{y})$

10. sinon les quatres racines complexes conjuguées deux à deux sont évidentes