

# Graphes

Malika More

(malika.more@u-clermont1.fr)

IREM Clermont-Ferrand

Formation ISN

20 octobre 2011

- 1 Introduction
- 2 Vocabulaire
- 3 Représentation des graphes en machine

# 1 Introduction

## 2 Vocabulaire

## 3 Représentation des graphes en machine

# Les sept ponts de Königsberg

## Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

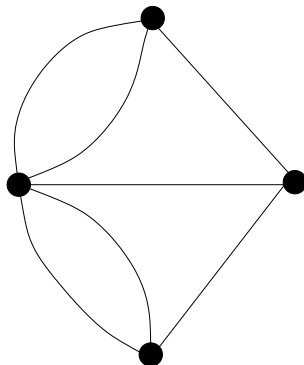


● Leonhard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

# Les sept ponts de Königsberg

## Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

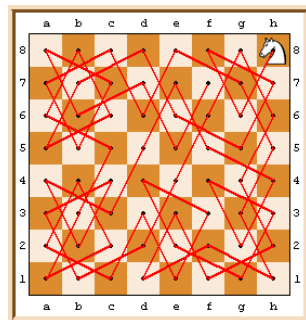


● Leonhard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

# La course du cavalier

## Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

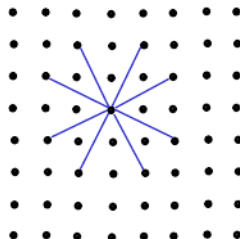


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

# La course du cavalier

## Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

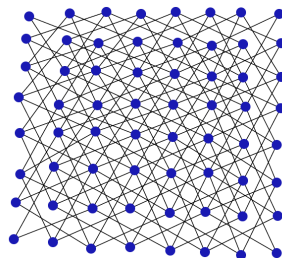


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

# La course du cavalier

## Une autre énigme

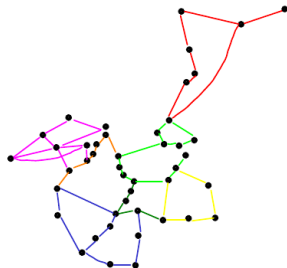
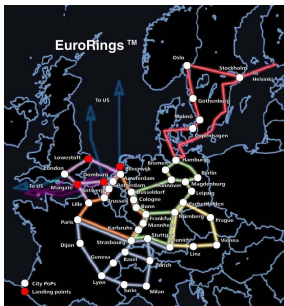
Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?



- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

# Un réseau

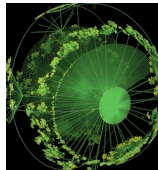
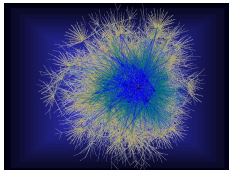
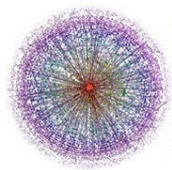
*The pan European KPNQwest network, when complete, will connect major cities together by six high-capacity backbone rings.*



# Le graphe du Web

## Définition

Ses sommets correspondent aux pages web, ses arêtes aux hyperliens.

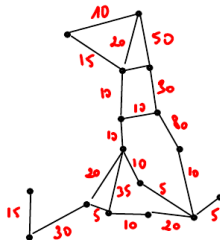
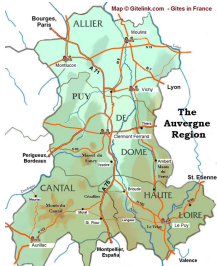


## Remarques

- Ce graphe est tellement énorme que trouver de bonnes manières de le dessiner est un domaine de recherche à part entière.
- Comprendre les propriétés de ce graphe est essentiel pour une compagnie comme Google.

# Le voyageur de commerce

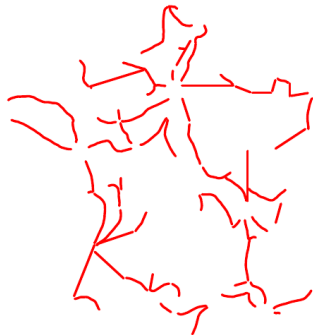
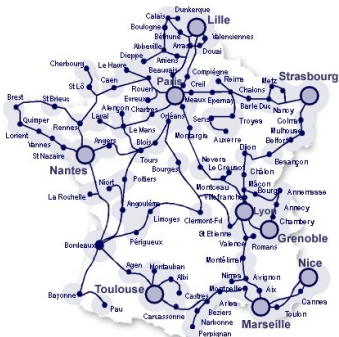
Étant donné un ensemble de destinations, le problème est de trouver un circuit qui visite chaque destination en visitant chacune d'elle exactement une seule fois, le tout en minimisant le coût du voyage.



- William Rowan Hamilton, vers 1800.
- Karl Menger, vers 1930.

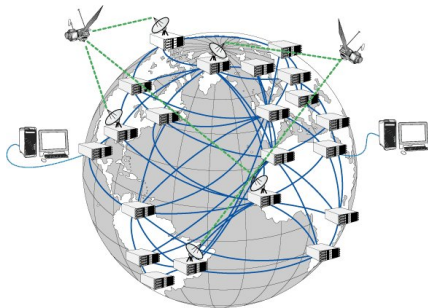
# Mise en place d'un réseau mixte cuivre et optique

Une société de téléphonie souhaite câbler entièrement une zone à l'aide de fibres optiques en minimisant le nombre de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s'appuie sur le réseau téléphonique déjà existant.



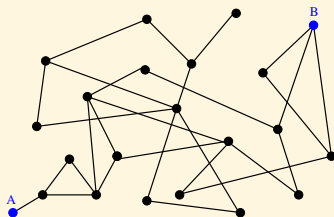
# Problème de routage dans un réseau du type internet.

Si un utilisateur désire accéder au contenu d'une page web présentée sur un serveur, une connexion entre ce serveur et la machine de l'utilisateur est nécessaire. Cette connexion n'est en général pas directe mais doit passer par une série de machine relais.



# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

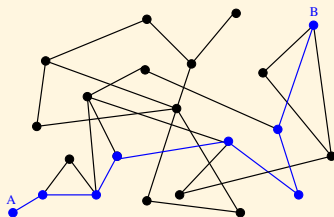
Les machines A et B peuvent-elles communiquer ?

## Notion

existence de chaînes

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

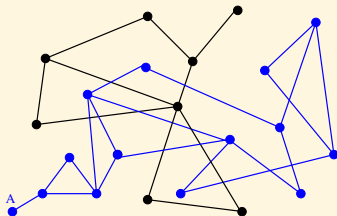
Si oui, en passant par quels intermédiaires ?

## Notion

détermination de chaînes - longueur de chaînes

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

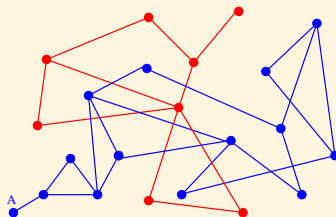
Avec quelles machines la machine A peut-elle communiquer ?

## Notion

sommets accessibles - composantes connexes

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

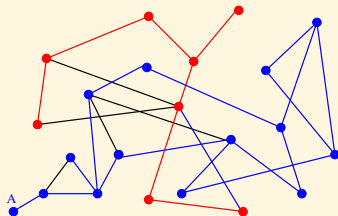
Deux machines quelconques peuvent-elles communiquer ?

## Notion

connexité

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

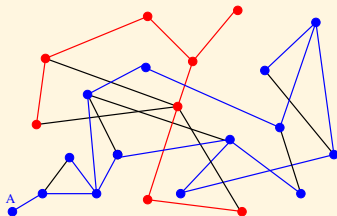
Pourrait-on se passer de certaines connexions ?

## Notion

recouvrement

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

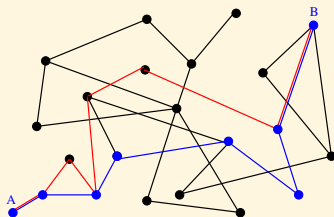
Trouver un ensemble minimal de connexions préservant la topologie du réseau ?

## Notion

arbre ou forêt de recouvrement minimal

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

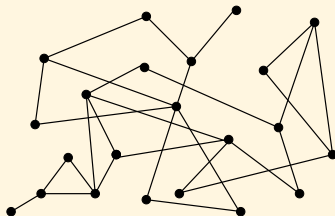
Si deux machines peuvent communiquer de plusieurs façons, comment choisir la meilleure ?

## Notion

chemins optimaux, distance

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un **circuit imprimé**



### Question

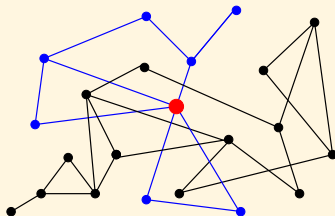
Imprimer le circuit de sorte que les liaisons ne se croisent pas (pour minimiser les couches) ?

### Notion

**graphe planaire**

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe d'un réseau



## Question

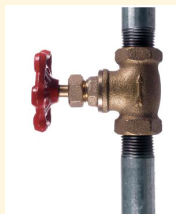
Assurer le fonctionnement du réseau si une des machines tombe en panne ?

## Notion

biconnexité

# À chaque question concrète, un problème de graphe

## Graphe avec capacités



## Question

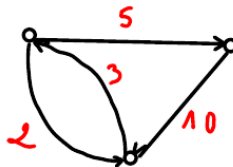
Capacité du réseau, problème de débit ?

## Notion

problèmes de flots

# Problème de temps de parcours

Par exemple, autour du périphérique à Paris.  
Notons que les temps de parcours dans un sens et dans l'autre ne sont pas forcément les mêmes (notion de **graphe orienté**).

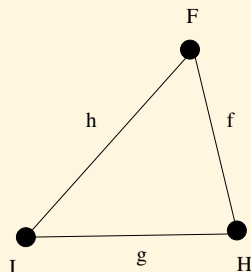
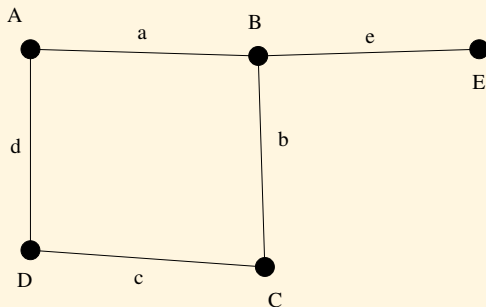


1 Introduction

2 Vocabulaire

3 Représentation des graphes en machine

## Un Graphe

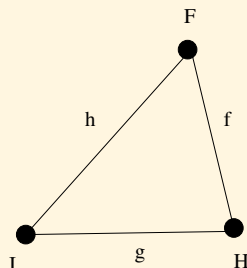
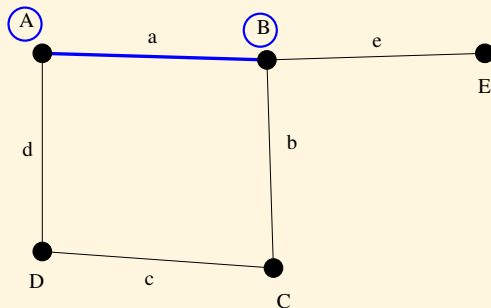


« Définition » par l'exemple

Le graphe est constitué

- des **sommets**  $\{A, B, C, D, E, F, H, I\}$
- des **arêtes**  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

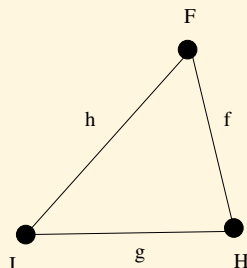
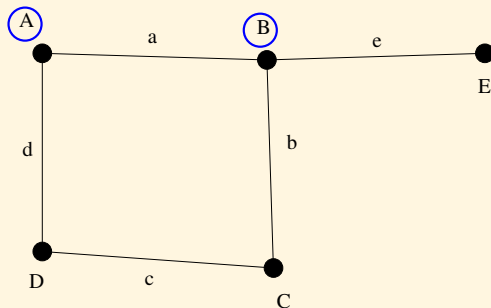
## Un Graphe



« Définition » par l'exemple

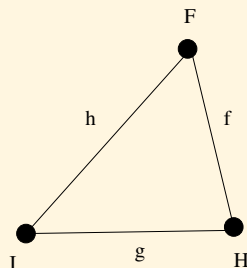
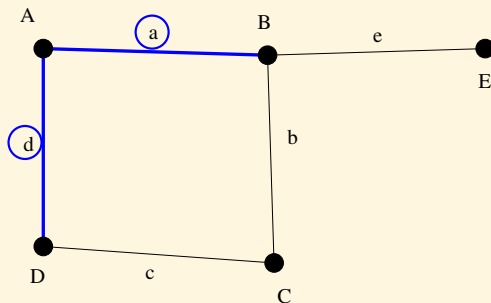
les sommets *A* et *B* sont les **extrémités** de l'arête *a*

## Un Graphe



« Définition » par l'exemple  
les sommets  $A$  et  $B$  sont **voisins**

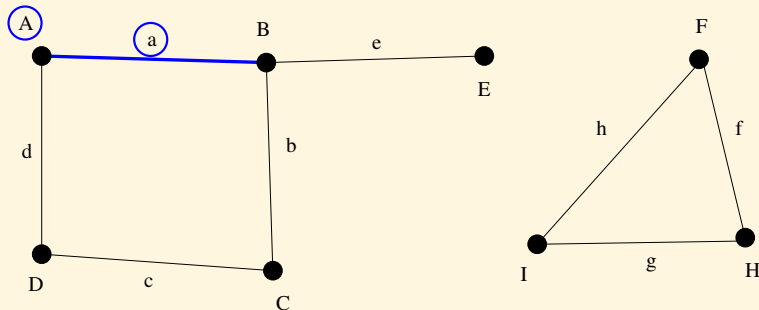
## Un Graphe



« Définition » par l'exemple

les arêtes *a* et *d* sont adjacentes

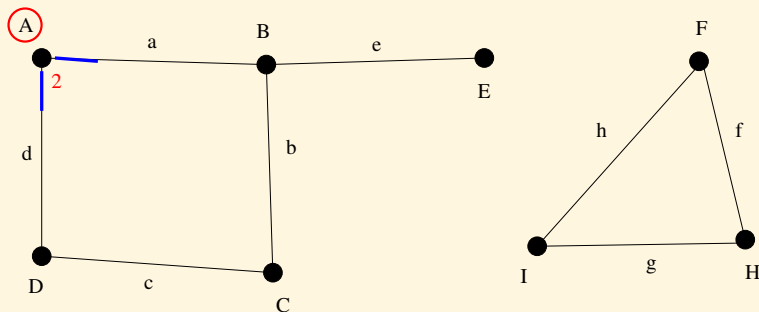
## Un Graphe



« Définition » par l'exemple

l'arête *a* est **incidente** au sommet A

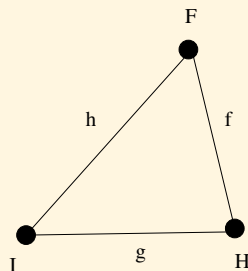
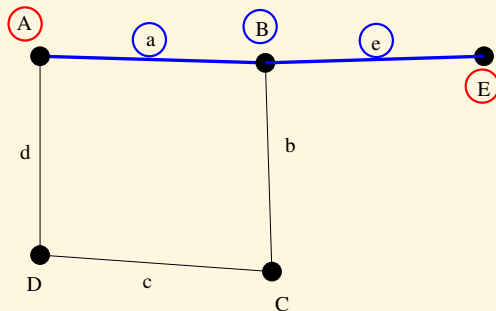
## Un Graphe



« Définition » par l'exemple

le **degré** du sommet A est 2.

## Chaîne

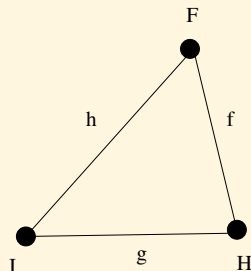
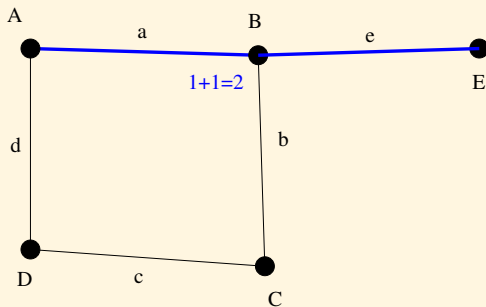


« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$  est une chaîne de notre graphe.

Les extrémités de cette chaîne sont A et E.

## Chaîne



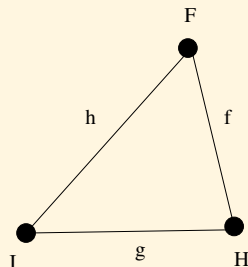
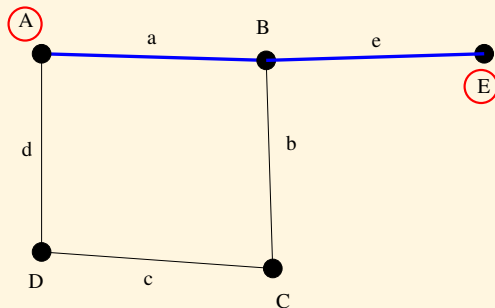
« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$  est une **chaîne** de notre graphe.

La **longueur** de la chaîne est 2.

En général, on parle en raccourci de la "chaîne  $ABE$ ".

## Chaîne

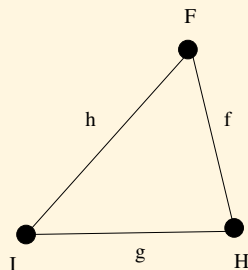
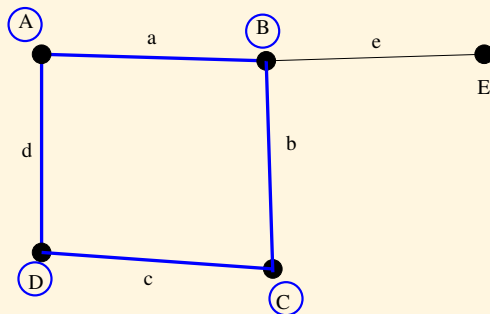


« Définition » par l'exemple :

$AaBeE$  est une chaîne de notre graphe.

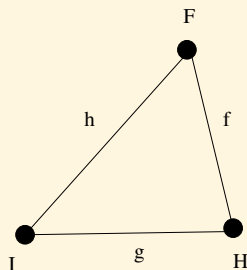
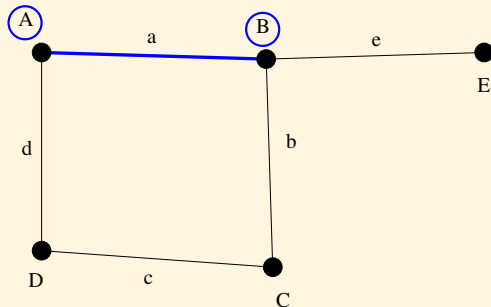
$E$  est accessible à partir de  $A$  et  $A$  est accessible à partir de  $E$ .

## Cycle



« Définition » par l'exemple :  
*ABCD*A est un **cycle** de notre graphe.

## Cycle

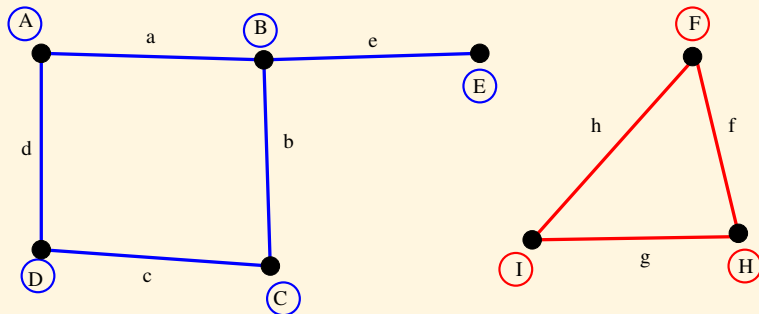


« Définition » par l'exemple :

*ABCD*A est un **cycle** de notre graphe.

**Attention** : les arêtes doivent être distinctes, c.-à-d. que *ABA* n'est pas un cycle.

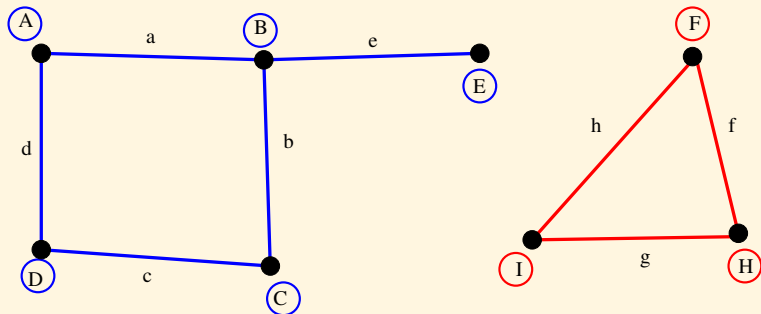
## Connexité



« Définition » par l'exemple :

**Composante connexe** : ensemble maximal de sommets mutuellement accessibles.

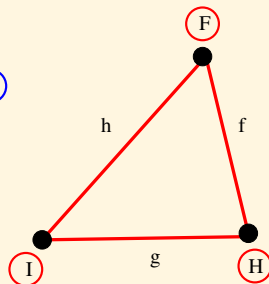
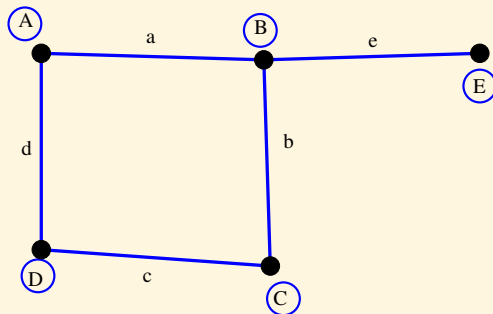
## Connexité



« Définition » par l'exemple :

Les composantes connexes de notre graphe sont  $\{A, B, C, D, E\}$  et  $\{F, H, I\}$ .

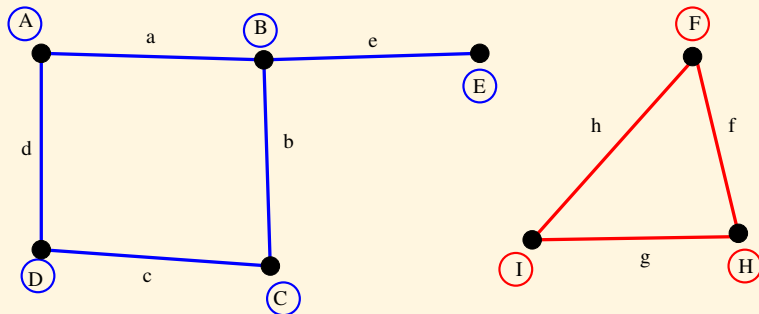
## Connexité



« Définition » par l'exemple :

Un graphe est **connexe** si tous les sommets sont mutuellement accessibles (c.-à-d. graphe constitué d'une seule composante connexe).

## Connexité



« Définition » par l'exemple :

Notre graphe n'est pas connexe puisqu'il est constitué de deux composantes connexes.

1 Introduction

2 Vocabulaire

3 Représentation des graphes en machine

# Représentations d'un graphe

## Question

Comment représenter un graphe afin de le coder en machine ?

## Remarque

La démarche est la même dans le cas d'un graphe orienté ou non. En effet, un graphe (non orienté) est vu comme un graphe orienté où on a un arc dans les deux sens pour chaque arête.

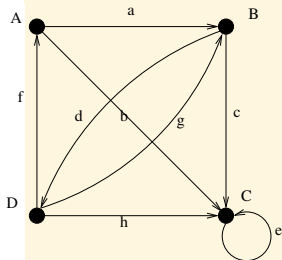
## Réponse

Il y a plusieurs solutions.

- avec des listes
- avec des tableaux

# Représentations par listes (graphes orientés)

## Listes des successeurs



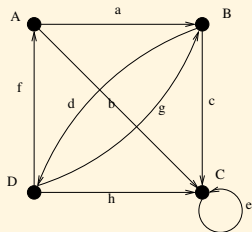
| sommet   | successeurs    |
|----------|----------------|
| <i>A</i> | <i>B, C</i>    |
| <i>B</i> | <i>C, D</i>    |
| <i>C</i> | <i>C</i>       |
| <i>D</i> | <i>A, B, C</i> |

## Remarques

- Alternative : **Listes des prédécesseurs**.
- Pour un graphe non-orienté, on prend simplement **les listes des voisins**.

# Représentation par tableau (graphes orientés)

## Tableau d'adjacence



| <i>origine \ fin</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i>             |          | <i>a</i> | <i>b</i> |          |
| <i>B</i>             |          |          | <i>c</i> | <i>d</i> |
| <i>C</i>             |          |          | <i>e</i> |          |
| <i>D</i>             | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> |          |

## Codage en C

- Tableau à deux dimensions  $t$
- $t[i][j] = 1$  si il y a un arc du sommet  $i$  au sommet  $j$ , et 0 sinon.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Représentation par tableau (graphes orientés)

Mathématiquement, il s'agit d'une matrice

Tableau d'adjacence

| <i>origine \ fin</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i>             |          | <i>a</i> | <i>b</i> |          |
| <i>B</i>             |          |          | <i>c</i> | <i>d</i> |
| <i>C</i>             |          |          | <i>e</i> |          |
| <i>D</i>             | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> |          |

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pub : google et la théorie spectrale des graphes

On peut même utiliser l'algèbre linéaire (le domaine d'étude des matrices) pour aborder et appréhender autrement les graphes. C'est le cas de l'algorithme d'**indexation de google** qui repose *grosso modo* sur le calcul d'un **vecteur propre** de la matrice d'adjacence du graphe du web.

# Avantages et inconvénients

- Listes des successeurs
  - **Avantage** : Le stockage utilise moins de mémoire ( $s + a$ )
  - **Inconvénient** : L'accès prend plus de temps (parcourir les listes)
- Tableau d'adjacence
  - **Avantage** : L'accès est direct ( $t[i][j]$ )
  - **Inconvénient** : Le stockage utilise plus d'espace ( $s^2$ )

FIN