Homographies laissant des complexes donnés invariants

On veut étudier l'ensemble des homographies du plan complexe qui laissent $\{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{j}; \mathbf{j^2}\}$ invariant.

Première méthode : on se débrouille

On veut ici étudier l'ensemble des fonctions h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c et d sont des complexes dont on supposera que c et d ne sont pas tous les deux nuls, telles que $h(\{0; 1; j; j^2\}) = \{0; 1; j; j^2\}$.

En particulier, on peut constater que la seule fonction homographique qui laisse chacun de ces éléments fixes est l'identité :

> $h(0) = 0$ équivaut à $b = 0$ et $d \neq 0$ ce qu'on suppose maintenant.
> $h(1) = 1$ équivaut alors à $a = c + d$ et $c + d \neq 0$ ce qu'on suppose maintenant.
> $h(j) = j$ équivaut alors à $(c + d)j = (cj + d)j$ donc à $c = 0$.
> On a alors $h(z) = z$.
>
> **Une autre méthode :** le polynome $aZ + b - Z(cZ + d)$ de degré 2 aurait quatre racines distinctes deux à deux donc serait identiquement nul donc $c = 0$, $b = 0$ et $a = d$ ce qui conduit au même résultat.
>
> *Remarque : cette conclusion reste vraie si on envisage le problème de l'invariance de trois complexes distincts deux à deux quelconques.*

En particulier, on peut constater qu'il n'existe pas de fonction homographique qui conserve 0 et 1 et échange j et j^2

> Comme ci-dessus, $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ équivaut à $b = 0$ et $d \neq 0$ et $a = c+d$ et $c+d \neq 0$ ce qu'on suppose maintenant.
> $h(j) = j^2$ et $h(j^2) = j$ équivaut alors à $(c + d)j = c + dj^2$ et $(c + d)j^2 = c + dj$. En additionnant les deux égalités on obtient $c = 0$ puis $d = 0$ ce qui a été exclu.

Deuxième méthode : on utilise la théorie des groupes

A la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ on associe la fonction homographique h_M définie par $h_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

I. Montrer que l'application h de $GL_2(\mathbb{C})$ qui à la matrice M associe la fonction homographique h_M est un morphisme pour les lois *produit de matrices* et *composition de fonctions*. Quel est son noyau ?

> Les vérifications de l'égalité $h_{MM'} = h_M \circ h_{M'}$ et de l'équivalence de $\forall z(cz + d \neq 0 \rightarrow h_M(z) = z)$ avec $M = Id$ sont sans problème.
>
> *En revanche, h_M n'est pas une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (sauf exceptions). Il faut travailler un peu pour avoir un ensemble d'arrivée avec une structure de groupe :*
> $\star$ soit considérer les fractions rationnelles $H_M(Z) = \frac{aZ+b}{cZ+d}$;
> $\star$ soit compléter $\mathbb{C}$ par un point à l'infini en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et poser dans le cas où $c \neq 0$ $\hat{h}_M(\infty) = \frac{a}{c}$ et $\hat{h}_M(-\frac{d}{c}) = \infty$ et dans le cas où $c = 0$ poser $\hat{h}_M(\infty) = \infty$;
> $\star$ soit considérer $\bar{h}_M$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} / \mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C} / \mathbb{C}^*$ en définissant $\bar{h}_M(\mathbb{C}(u, v)) = \mathbb{C}(au + bv, cu + dv)$
> *Dans le premier cas, il faudrait parler de "substitution d'un complexe z à l'indéterminée Z et dans le dernier identifier un complexe z_0 à $\mathbb{C}(z_0, 1)$. Dans les deux derniers cas, on peut démontrer la bijectivité de $\hat{h}$ et $\bar{h}$ alors que h_M ne l'est que de $\{z \in \mathbb{C}; cz + d \neq 0\}$ dans $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}; cz = a\}$. Dans toute la suite, on pratiquera l'abus de langage sans restriction.*

On note G_X l'ensemble des homographies qui laissent $X=\{0;1;j;j^2\}$ invariant. Montrer que c'est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$. Démontrer que l'application qui, à un élément de G_X, associe sa restriction à X est une injection de G_X dans l'ensemble des permutations de X.

$h_{id}(X)=X$ et si $h_M(X)=X$ et $h_{M'}(X)=X$ alors $h_{MM'}(X)=X$ et facilement $h_M^{-1}(X)=X$ [a].

h_M restreinte à X est injective (car h_M est injective) et surjective sur X (par hypothèse) donc bijective de X sur X.

Dans ce type de problème (i.e. étudier les machins qui laissent un truc invariant), les deux questions ci-dessus ne laissent pas de difficultés mais la suivante peut présenter quelques aspérités.

On démontre que si $h_M(0)=0$ et $h_M(1)=1$ et $h_M(j)=j$ et $h_M(j^2)=j^2$, alors $h_M=Id$ (voir plus haut).

a. toujours avec un abus de langage

On note $R=\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +2 & +1\end{pmatrix}$. Montrer que R et T appartiennent à G_X.

$h_{R/X}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & j & j^2 \\ 0 & j & j^2 & 1\end{pmatrix}$ et $h_{T/X}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & j & j^2 \\ 0 & 1 & j^2 & j\end{pmatrix}$.

Les homographies du sous-groupe engendré par h_R et h_T laissent donc X invariant. On va par la suite démontrer que toutes les homographies laissant X invariant sont des composées de h_R et h_T et qu'elles définissent exactement les permutations paires de X.

II. On note $I=\{0;1;2;3\}$ et A_4 l'ensemble des permutations paires de I. [1]

Montrer que $\{s\in A_4; s(0)=0\}$ définit un sous groupe de A_4. Déterminer ce sous groupe.

$G_0=\{s\in A_4; s(0)=0\}$ définit un sous groupe de A_4 [a].

a. *encore un ensemble de machins qui laissent le truc 0 invariant!*

Attention : voici ce qu'il ne faut pas faire maintenant [b] :

Il est isomorphe à $\Sigma_{\{1,2,3\}}$ par $\left\{\begin{array}{ccc} G_0 & \to & \Sigma_{\{1,2,3\}} \\ \sigma & \to & \sigma_{/\{1,2,3\}}\end{array}\right.$:

$\star$ $\sigma_{/\{1,2,3\}}$ est clairement une bijection de $\{1,2,3\}$

$\star$ $\sigma_{/\{1,2,3\}}=\sigma'_{/\{1,2,3\}}$ implique clairement que $\sigma=\sigma'$

$\star$ Pour $\sigma_0\in\Sigma_{\{1,2,3\}}$ donnée, il existe clairement une permutation σ de $\{0,1,2,3\}$ telle que $\sigma(0)=0$ et $\sigma_{/\{1,2,3\}}=\sigma_0$

b. pourquoi ?

Voici ce qu'on peut faire maintenant :

soit $\sigma\in G_0$

$\star$ $\sigma_{/\{1,2,3\}}$ est une bijection de $\{1,2,3\}$

$\star$ Pour $\sigma_0\in\Sigma_{\{1,2,3\}}$ donnée, $\sigma(0)=0$ et $\sigma_{/\{1,2,3\}}=\sigma_0$ définit une permutation σ de $\{0,1,2,3\}$. Cette permutation est paire (dans A_4) si et seulement si σ_0 est paire si et seulement si σ_0 est un 3-cycle [a] soit Id ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$\star$ en conclusion, $G_0=\left\{Id,\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$ (il est en particulier cyclique).

a. dans Σ_3 qui a 6 éléments, il y a trois transpositions, qui sont impaires, les trois autres permutations sont donc paires; il est par ailleurs connu - et facile de vérifier dans ce cas - que les 3 cycles sont pairs : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b\end{pmatrix}$

1. Cette partie est tirée d'un problème de Jean Marie Arnaudies.

Montrer que pour tout $i \in I$, il existe un unique élément de A_4 noté τ_i tel que $\tau_i^2 = Id$ et $\tau_i(0) = i$.

⋆ cas $i = 0$. Condition nécessaire : d'après ce qui précède, $\tau_{i/\{1;2;3\}}$ serait un 3-cycle satisfaisant $\tau_{i/\{1;2;3\}}^2 = \tau_{i/\{1;2;3\}}$ donc c'est l'identité. Condition suffisante : Id convient.
⋆ cas $i \neq 0$. Condition nécessaire : $\tau_i(i) = \tau_i\tau_i(0) = 0$ comme τ_i est paire, $\tau_{/\{1;2;3\}-\{i\}}$ est une transposition. La réciproque est claire.
⋆ Conclusion : $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau_0 = Id$.

Démontrer que $G_1 = \{s \in A_4; s^2 = Id\}$ est un sous groupe de A_4. Déterminer ce sous groupe.

Dans un cas plus général, une telle question n'est pas claire car de $s^2 = Id$ et $s'^2 = Id$ on ne peut pas tirer $(ss')^2 = Id$ sans la commutativité.

D'après ce qui précède, $G_1 = \{Id, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. On vérifie que $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_3$ donc aussi $\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_3$ et $\tau_1 = \tau_3 \circ \tau_2$ et que $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_3$ donc aussi $\tau_2 = \tau_3 \circ \tau_1$ et $\tau_1 = \tau_2 \circ \tau_3$. En particulier, le groupe est commutatif.

Prouver que pour tout $\gamma \in A_4$ il existe un unique $i \in I$ tel que $\gamma \circ \tau_i(0) = 0$ et un unique $j \in I$ tel que $\tau_j \circ \gamma(0) = 0$.

$\tau_{\gamma^{-1}(0)}$ est solution unique du premier problème
$\tau_{\gamma(0)}$ est solution unique du deuxième problème

On définit σ par $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$. Calculer $\sigma \circ \tau_1 \circ \sigma^2$ et $\sigma^2 \circ \tau_1 \circ \sigma$. Quel est le sous-groupe engendré par σ et τ_1 ?

Remarquer que $G_0 = \{Id, \sigma, \sigma^2\}$.
• A la main, on vérifie que $\sigma \circ \tau_1 \circ \sigma^2 = \tau_2$ et $\sigma^2 \circ \tau_1 \circ \sigma = \tau_3$.
• Le groupe engendré par σ et τ_1 contient donc G_0 et G_1
• Enfin, il contient A_4 : d'après la question précédente, tout $\gamma \in A_4$ s'écrit $\gamma = \tau_i \circ \sigma^j$.

III. Démontrer que l'application qui à un élément de G_X associe sa restriction à X est surjective sur l'ensemble des permutations paires des éléments de X.

On peut introduire une numérotation des éléments de X par $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(j) = 2$, $\phi(j^2) = 3$.
• L'image de l'application mentionnée dans la question contient $h_{R/X} = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ et $h_{T/X} = \phi \circ \tau_1 \circ \phi^{-1}$ donc $A(X)$ d'après ce qui précède.
• Si il contiennait une permutation impaire, il les contiendrait toutes [a], or une au moins n'y est pas d'après les calculs initiaux.

---

a. si σ_0 est une permutation impaire, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} A_4 & \to & \Sigma_4 - A_4 \\ s & \to & s \circ \sigma_0 \end{array} \right.$ est une bijection