Fonction définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} dt$

Cet exercice met en évidence une situation où un défaut de satisfaction de l'hypothèse de domination dans le théorème de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle ne permet pas de conclure (voir dérivabilité de F) et nécessite de se placer sur des compacts, limitant ainsi la conclusion à la réunion de ces compacts.
Par ailleurs, les notes de bas de page mettent en évidence une variante où un défaut de satisfaction de l'hypothèse de continuité dans le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre ne permet pas de conclure (voir continuité de F). [1]

Intégrabilité de la fonction définie par $f_x(t) = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

- f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc localement intégrable ;
- Elle admet une limite finie en 0 qui est 0 si $x \neq 0$ et 1 sinon, d'où l'intégrabilité sur $[0;1]$;
- $0 \leq f_x(t) \leq e^{-t^2}$ d'où l'intégrabilité sur $[1;+\infty[$ [a].

a. cette majoration prouve à elle seule seule l'intégrabilité sur $]0;+\infty[$ mais seulement sur l'intervalle ouvert alors que les limites prouvent l'intégrabilité sur le fermé en 0

Donc f_x est intégrable sur $[0;+\infty[$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,t) = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$

Commentaire [a]

a. On pourrait définir la fonction $\bar{f}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par $\bar{f}(x,t) = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ et $\bar{f}(x,0) = 0$ si $x \neq 0$ et $\bar{f}(0,0) = 1$; remarquer qu'alors $\int_0^{+\infty} \bar{f}(x,t)dt$ existe et est égale à $\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} dt$

Continuité de la fonction F :

- f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ [a]
- $|f(x,t)| \leq e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ [b]

[c]

a. En revanche $\bar{f}$ ne l'est pas sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
b. $|\bar{f}(x,t)| \leq e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
c. Ainsi la continuité de F sur $\mathbb{R}$ apparaît comme conséquence du théorème de continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$!

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de la fonction F :

- f est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

  la majoration simple $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2x}{t^2} e^{-t^2}$ *ne permet pas de conclure car le majorant dépend de x et n'est pas intégrable sur $]0;+\infty[$; on va éliminer le problème d'intégrabilité en 0 en gardant le facteur $e^{-\frac{x^2}{t^2}}$, éliminer la présence de x dans ce facteur en minorant $|x|$ et éliminer la présence de x en facteur en majorant $|x|$*
- si $0 < a < b$, alors pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^*$ on a $|f(x,t)| \leq \dfrac{2b}{t^2} e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}$ qui est intégrable sur $]0;+\infty[$: continue sur $]0;+\infty[$, admet une limite finie (nulle) en 0, et majorée par en $\dfrac{2b}{t^2}$. [a]

a. Remarquer que là non plus on ne pouvait pas raisonner avec $\bar{f}$ car à cause des problèmes en $(0,0)$.

Donc F est dérivable sur $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (et sur $\mathbb{R}^*$ par parité) de dérivée $F'(x) = -2x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}} dt.$

1. mais pas le problème de l'hypothèse de continuité dans le théorème de dérivation comme je l'ai cru un instant

Calcul de la fonction F :

Bien sûr $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

on en profite pour revoir le calcul de l'intégrale de Gauss

- la fonction définie par e^{-x^2} est intégrable sur $[0; +\infty[$ car .... .

  On utilise l'idée suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

  on calcule l'intégrale double par passage en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times[0,\,\frac{\pi}{2}]} e^{-r^2}rdrd\theta = \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

  Le problème est la légitimité de ce calcul. Suit une méthode élémentaire, c'est-à-dire avec peu d'outils théoriques, basée sur l'encadrement de rectangles (pour un calcul facile des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes) par des disques (pour un calcul facile des intégrales doubles en coordonnées polaires)

- $\displaystyle\int\int_{\substack{0\le x\le R\\ 0\le y\le R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \int\int_{x^2+y^2\le R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \int\int_{\substack{0\le x\le R\sqrt{2}\\ 0\le y\le R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

  D'où [a] $\displaystyle\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \le \left(\int_0^R e^{-r^2}rdr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \le \left(\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-x^2}dx\right)^2$ et on finit le calcul en passant à la limite.

  [a] d'après le théorème de Fubini sur les rectangles

Pour la suite, la méthode traditionnelle consiste à remarquer que la forme de la dérivée n'est pas très éloignée de celle de la fonction et qu'on peut peut être trouver entre elles une relation qui fournit une équation différentielle simple. En fait dans ce cas, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde pour que cette équation différentielle apparaisse naturellement. Ici, on fait appel à une grosse astuce pour éviter les calculs.

exercice de calcul

On prend $x > 0$:

Comparer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$.

Comparer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2}e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$.

En déduire que $F'(x) + 2F(x) = 0$.

En déduire que $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$.

On remarquera enfin que cette fonction n'est pas dérivable en 0.