

LES BACTERIES

Table des matières

Fiche professeur	2
Fiche élève 1	5
Fiche élève 2	6
Narration de séance et productions d'élèves 1	7
Narration de séance et productions d'élèves 2	10

Fiche professeur

LES BACTERIES

➤ **Niveaux et objectifs pédagogiques**

4^e : introduction à la notion de puissances d'un nombre : écritures, calculs ; utilisation de la calculatrice ; écriture scientifique d'un nombre.

3^e : réinvestissement des notions précédentes.

➤ **Modalités de gestion possibles**

1) En deux temps (fiche élève 1) :

- Travail de recherche à la maison avec l'exercice « des chats », mise en commun et correction en classe.
- Calcul du nombre 3^{24} (travail individuel puis éventuellement par deux).

2) On peut proposer d'emblée l'activité concernant les bactéries (fiche élève 2), avec appropriation individuelle, travail en groupes, mise en commun.

Dans les deux cas :

Les calculs peuvent se faire en utilisant la calculatrice, mais les élèves se heurteront à l'écriture scientifique (à partir de 3^{21}), écriture inconnue si l'activité se fait en 4^e en introduction au travail sur les puissances. On pourra alors leur demander de trouver le résultat (exact) en se servant de la calculatrice et en effectuant à la main le minimum d'opérations. On pourra mettre en place la notation exposant et effectuer les premières manipulations des écritures avec exposants, puis introduire l'écriture scientifique. On pourra ensuite mener un travail sur le sens de la valeur exacte et sur celui d'une valeur approchée donnée par la calculatrice.

Le choix des 24 heures n'est pas anodin, 24 étant le premier nombre après 21 qui permet des regroupements intéressants.

➤ **Degré de prise en main de la part du professeur**

Premier degré.

➤ **Situation**

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

➤ **Supports et ressources de travail**

Calculatrice, éventuellement tableur.

➤ **Consignes données à l'élève**

Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ? Présenter la démarche et les calculs sur papier (ou transparent).

Mai 2012

➤ **Dans le document d'aide au suivi de l'acquisition des connaissances et des capacités du socle commun**

Pratiquer une démarche scientifique ou technologique, résoudre des problèmes	Capacités susceptibles d'être évaluées en situation	Critères de réussite
<ul style="list-style-type: none"> • Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes 	Calculer.	L'élève pose et effectue des multiplications.
<ul style="list-style-type: none"> • Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer 	<p>Proposer une démarche de résolution : choisir, adapter une méthode, un protocole.</p> <p>Exploiter les résultats : confronter le résultat obtenu au résultat attendu.</p>	<p>L'élève optimise le nombre d'opérations à effectuer en rassemblant plusieurs facteurs ($3^{24} = 3^{20} \times 81$ ou $3^{24} = (3^{12})^2 \dots$) sans nécessairement reprendre ces notations.</p> <p>L'élève compare son résultat avec l'affichage de la calculatrice et fait le lien avec le « 10^{11} » affiché.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté 	Présenter, sous une forme appropriée, une situation (avec une formulation adaptée), un questionnement, une conjecture, une démarche (aboutie ou non), un algorithme, un résultat, une solution.	L'élève présente de manière claire les calculs effectués, en utilisant éventuellement parfois la notation puissance.

Savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques	Capacités susceptibles d'être évaluées en situation	Critères de réussite
<ul style="list-style-type: none"> • Nombres et calculs 	<p>Mobiliser des écritures différentes d'un même nombre.</p> <p>Choisir l'opération qui convient.</p> <p>Maîtriser de manière automatisée les tables de multiplication pour effectuer un calcul réfléchi, un calcul posé.</p> <p>Mener à bien un calcul instrumenté (calculatrice, tableur).</p> <p>Contrôler un résultat à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.</p>	<p>L'élève fait un lien entre les opérations effectuées et les notations (par exemple : $3^{24} = 3^{20} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{20} \times 3^4$), puis interprète l'écriture scientifique.</p> <p>L'élève multiplie itérativement par 3.</p> <p>Les opérations sont justes.</p> <p>L'élève utilise la touche « exposant » de sa calculatrice.</p> <p>L'élève compare la valeur approchée affichée par la calculatrice et son résultat, fait le lien entre les 12 chiffres du nombre et le « 10^{11} » affiché.</p>

➤ **Dans les programmes des niveaux visés**

Niveaux	Connaissances	Capacités
4 ^e	Puissances d'un nombre	Comprendre la notation a^n et savoir l'utiliser pour des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$.
		<i>Utiliser la notation scientifique.</i>

➤ **Aides ou « coups de pouce »**

- **vérification d'une bonne compréhension de la situation et de la consigne**

Pourquoi faut-il calculer à la main ce nombre ?

Comment avait-on trouvé les réponses précédentes ?

Pourquoi la calculatrice ne permet-elle pas d'obtenir le résultat exact ?

Comment peut-on utiliser la calculatrice pour ne garder que très peu de calculs à faire manuellement ?

- **aide à la démarche de résolution**

Ecrire en ligne tous les calculs à effectuer.

Peut-on gagner du temps pour effectuer ces calculs ?

- **apport de connaissances et de savoir-faire**

Rappel des propriétés de la multiplication.

➤ **Approfondissement et prolongement possibles**

Chercher différentes méthodes de calcul, en utilisant la notation puissance pour leur présentation.

Fiche élève 1

LES BACTERIES

1. La devinette d'Alexis

Dans un bus, il y a 7 enfants. Chaque enfant a 7 sacs. Dans chaque sac se trouvent 7 chats. Chaque chat a 7 bébés chats.

Combien y a-t-il de chats dans le bus ?

2. Les bactéries

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

Présenter la démarche et les calculs sur papier (ou transparent).

Fiche élève 2

LES BACTERIES

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

Présenter la démarche et les calculs sur papier (ou transparent).

Narration de séance et productions d'élèves 1

D'après la fiche élève 1 :

Cette narration correspond à la première modalité de gestion proposée. Le support de travail était un polycopié proposant les deux exercices : « La devinette d'Alexis » et « Les bactéries », l'exercice sur les bactéries étant dans une forme plus détaillée que celle présentée au-dessus :

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par quel nombre le nombre initial de bactéries a-t-il été multiplié

- Au bout de 2 heures ?
- Au bout de 5 heures ?
- Au bout de 8 heures ?
- Au bout de 24 heures ?

Le travail a été mené en 4^e, en introduction au travail sur les puissances.

Les deux exercices du polycopié ont été donnés en recherche à la maison, la correction se faisant de manière « classique » par des élèves venant présenter individuellement au tableau leur travail.

Ex 1 : Rapidement, certains élèves pensent à noter 7^4 pour $7 \times 7 \times 7 \times 7$.

L'utilisation de la notation suivante est utilisée pour écrire l'expression du calcul du nombre total de chats : $7^3 + 7^4$. Utilisation de la calculatrice et des règles de priorités opératoires pour s'apercevoir que cela ne peut pas s'écrire 7^7 comme le proposent certains.

Ex 2 : Le nombre de réponses erronées est important (3×2 au lieu de 3^2).

Calcul de 3^2 , puis 3^5 , puis 3^8 , puis 3^{24} : introduction de la touche « exposant ».

L'affichage de la calculatrice n'est pas compris pour 3^{24} (affichage d'une valeur approchée, en notation scientifique) : je leur demande alors de calculer à la main (calculatrice tout de même autorisée) cette valeur.

Ils auront à présenter leurs calculs sur une feuille blanche, destinée à être photocopiée sur transparent pour exposer les différentes méthodes utilisées.

Il ressort alors de nombreuses égalités telles que :

$$3^{24} = 3^{20} \times 3^4 = 3^{20} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{20} \times 81 \quad \text{et} \quad 3^{24} = 3^{12} \times 3^{12} = (3^{12})^2 = (3^8)^3.$$

Se discute alors de l'affichage de la calculatrice : le lien entre cet affichage et la valeur exacte se fait rapidement, il ressort qu'en multipliant par 10^{11} , c'est-à-dire par $10 \times 10 \times \dots \times 10$, on « avance » 11 fois la virgule, ce qui amène « presque » à 282 429 536 481, avec l'arrondi sur le dernier chiffre affiché (5 pour 481).

D'où l'introduction de la notation scientifique et son utilisation pour donner des valeurs approchées des grands nombres.

Exemples de productions :

« Bonne élève » ayant été invitée à résumer son calcul en utilisant la notation puissance, puis à proposer différentes méthodes.

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{3 \times 3}_{9} \times \underbrace{3 \times 3}_{9} \\
 \underbrace{81 \times 81}_{6561} \times \underbrace{81 \times 81}_{6561} \times \underbrace{81 \times 81}_{6561} \\
 43046721 \\
 = 282\ 429\ 536\ 481 \\
 3^{24} = 9^{12} = 81^6 = (81^2)^3 = 6561^3
 \end{array}$$

Claire

Les copies suivantes sont des copies individuelles, non abouties par manque de temps (fin de séance). Les élèves sont venus au tableau résumer leur méthode de calcul en utilisant la notation puissance lors de la séance suivante (leur copie étant présentée à la classe par transparent), ce qui a permis d'établir la définition et les premières propriétés de calculs avec la notation « puissance » : la comparaison avec l'affichage calculatrice a permis d'évoquer tout de suite le cas des puissances de 10, et la notation scientifique pour appréhender une valeur approchée d'un très grand nombre.

Les items : « Choisir une méthode, l'adapter,... » ; « poser un calcul » ; « présenter la démarche » ; « utiliser différentes écritures d'un nombre » ; « confronter le résultat au résultat attendu » ont souvent pu être évalués positivement lors du compte rendu.

Calcul de la valeur exacte de 3^{24} :

$$\begin{array}{l}
 \overbrace{3 \times 3 \times 3}^{3^{20}} \\
 3 \times 3 \times 3 = 384\ 678\ 460\ 1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3
 \end{array}$$

$3^{24} = 3^{20} \times 3^4 = 3^{20} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
L'élève a posé 4 multiplications.

Narration de séance et productions d'élèves 2

Déroulement des séances avec une classe de 4e

Les séances viennent après 3 semaines de travail sur le théorème des milieux et le théorème de Thalès.

La tâche complexe a été posée sous cette forme :

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre initial de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

On demande l'écriture décimale exacte de ce nombre.

Séance 1 : Les élèves commencent à travailler individuellement (5 minutes). Pour cette activité, toutes les ressources sont à leur disposition. Les documents de cours, livres, calculatrices, et ordinateurs sont autorisés.

Pour de nombreux élèves, la première réponse est : « $24 \times 3 = 72$. Au bout de 24 heures, il y a 72 bactéries ».

Il y a confusion entre le modèle additif, la répétition d'un ajout de 3, et du modèle multiplicatif, répétition d'une multiplication par 3.

Notons que cette erreur est persistante. Les élèves confondent a^n et $a \times n$, pour a nombre relatif non nul et n entier. Il ne s'agit pas de la confusion des écritures mais des types de problèmes faisant appel au répertoire additif et au répertoire multiplicatif.

Cette confusion est probablement entretenue par le fait de dire $a^n = a \times a \dots a \times a$ répété n fois plutôt que n facteurs égaux à a .

D'autres commencent à calculer étape par étape, au bout d'une heure, de deux heures, etc...

Un point est fait oralement sur la compréhension du sujet mais aucune solution n'est évoquée.

C'est alors que les élèves sont mis en groupes (de 3 ou 4). Les groupes sont formés à leur convenance par affinités.

La solution qui consiste à adopter un modèle additif est alors mise en défaut par les autres membres du groupe. Ils se rendent compte que le nombre de bactéries dès les premières étapes est beaucoup plus grand que 72...

Un seul groupe résiste et est d'accord sur la solution de 72 bactéries. Je leur demande donc d'écrire au bout d'une heure, de deux heures, de trois heures... Le groupe comprend que son résultat ne convient pas.

Mai 2012

Rapidement dans la classe le produit de 24 facteurs égaux à 3 arrive comme solution.

$$3 \times 24 = 72$$

$$3 \times 3 = 8,82695369 \times 10^{11}$$

Il leur reste à effectuer cette multiplication et à donner l'écriture décimale exacte de ce nombre.

Certains écrivent toutes les étapes et calculent à chaque étape, d'autres écrivent uniquement le résultat. Tous les groupes se servent de la calculatrice pour trouver l'écriture décimale du nombre.

Ceux qui ont fait étape par étape sont bloqués à l'étape 21. En effet la calculatrice donne un nombre écrit à l'aide de puissances de 10. La notation puissance n'a pas été vue et ils ne savent pas lire ce nombre. Ils me demandent donc ce que cela veut dire. Je leur explique alors que 10^{10} signifie $10 \times 10 \times 10$.

Ils comprennent qu'il s'agit de multiplications par 10 et donc qu'il s'agit de déplacer la virgule. J'aurais pu choisir de ne pas leur donner l'écriture et de les laisser chercher sur leur manuel. Les résultats sont donnés par la calculatrice.

Le nombre initial de bactéries n'étant pas donné, certains raisonnent avec une bactérie, un autre groupe avec 10.

Bactérie : 10

- 1) $10 \times 3 = 30$
- 2) $30 \times 3 = 90$
- 3) $90 \times 3 = 270$
- 4) $270 \times 3 = 810$
- 5) $810 \times 3 = 2430$
- 6) $2430 \times 3 = 7290$
- 7) $7290 \times 3 = 21870$
- 8) $21870 \times 3 = 65610$
- 9) $65610 \times 3 = 196830$
- 10) $196830 \times 3 = 590490$
- 11) $590490 \times 3 = 1771470$
- 12) $1771470 \times 3 = 5314410$
- 13) $5314410 \times 3 = 15943230$
- 14) $15943230 \times 3 = 47829690$
- 15) $47829690 \times 3 = 143489070$

Mai 2012

	A	B	C	D	E
1		Temps	Nombre de bactéries		
2		0	1		
3		1	3		
4		2	9		
5		3	27		
6		4	81		
7		5	243		
8		6	729		
9		7	2187		
10		8	6561		
11		9	19683		
12		10	59049		
13		11	177147		
14		12	531441		
15		13	1594323		
16		14	4782969		
17		15	14348907		
18		16	43046721		
19		17	129140163		
20		18	387420489		
21		19	1162261467		
22		20	3486784401		
23		21	10460353203		
24		22	31381059609		
25		23	94143178827		
26		24	###		
27					
28					
29					
30			Nombre de bactéries du départ		
31			1		

Les colonnes n'étant pas assez grandes l'ordinateur ne leur donne pas la solution.

A la fin de l'heure ils vont dans la cellule, changent le « format » et finissent par trouver le nombre exact (282 429 536 481).

Les autres groupes voient leurs camarades sur l'ordinateur et savent qu'ils ont trouvé. Ils sont intrigués et se demandent s'il faut utiliser l'ordinateur et pour quoi faire.

Travail pour la séance suivante : réviser les fiches sur le fonctionnement du tableur.

Séance 2 : En plénière

Après un bref rappel de l'énoncé du problème, j'introduis la notation puissance aux élèves. Avant même que je ne l'introduise, ce mot était déjà sorti mais aucun ne savait réellement ce que cela voulait dire. Ils l'avaient déjà entendu en sciences physiques.

Nous utilisons une feuille de correction. A l'oral, je leur fais travailler la notation puissance : « Et si les bactéries se multiplient par 5, par 4, par 10... ? ». Ils expriment les résultats à l'aide de puissances de 5, de 4, de 10.

Ils voient là l'intérêt d'une telle notation qui permet d'écrire les résultats sous forme condensée. Contrairement à un enseignement classique où la question « ça sert à quoi ? » apparaît, ici aucun élève ne le demande et tous paraissent convaincus par une telle notation.

Tâche complexe produite par l'académie de Clermont-Ferrand

Mai 2012

Nous nous arrêtons de donner les résultats au bout de 21 heures de prolifération des bactéries. Nous faisons le point sur les pistes trouvées par les différents groupes.

Deux groupes ont trouvé un nombre final de bactéries au bout de 24 heures :

- le groupe tableur
- un groupe qui a réussi à écrire le résultat en partant du résultat de la calculatrice et en ajoutant les zéros nécessaires.

Nous confrontons alors les résultats sans expliquer la démarche.

Problème :

Le groupe tableur trouve : 282 429 536 481. Le groupe calculatrice trouve : 282 429 536 500.
Les résultats sont différents ! Qui a tort ? Qui a raison ?

Je rebondis sur le fait qu'un groupe a utilisé l'informatique. Ils nous expliquent à l'oral ce qu'ils ont fait.

Je demande aux autres élèves de résoudre le problème de la même manière à l'aide du tableur.

	A	B	C
1	Temps	Nombres de bactéries	
2	0		1
3	1		3
4	2		9
5	3		27
6	4		81
7	5		243
8	6		729
9	7		2187
10	8		6561
11	9		19683
12	10		59049
13	11		177147
14	12		531441
15	13		1594323
16	14		4782969
17	15		14348907
18	16		43046721
19	17		129140163
20	18		387420489
21	19		1162261467
22	20		3486784401
23	21		10460353203
24	22		31381059609
25	23		94143178827
26	24		282429536481,00000000000000000000
27			

Le groupe l'ayant déjà fait continue de travailler, cette fois-ci sur papier.

A la fin de l'heure tous les groupes ont fini le travail et ont envoyé leur fichier via l'ENT. Ceci me permet au passage de valider quelques compétences pour le B2i.

Mai 2012

Séance 3 : En plénière

Bref rappel du problème.

Les élèves sont tous convaincus que le résultat trouvé par le tableur est juste mais alors pourquoi le résultat trouvé par l'un des groupes est-il différent et par conséquent faux ? Ils pensent avoir fait une erreur de calcul.

Le groupe explique alors son raisonnement. Nous reprenons tous ensemble son cheminement. Ceci me permet d'introduire pour tous les puissances de dix. Nous remarquons le fait suivant grâce aux détails des calculs : 10^{10} s'écrit 1 suivi de 10 zéros... 10^{11} s'écrit 1 suivi de 11 zéros...

Là encore ils voient l'intérêt d'utiliser la notation puissance.

Les calculs des élèves sont justes mais pourquoi un résultat différent entre calculatrice et ordinateur ?

Un élève s'exclame : « L'ordinateur est plus puissant ».

Ils finissent par comprendre que la calculatrice est limitée.

Je leur demande alors d'expliquer pourquoi il est impossible que 3^{24} soit égal à 282 429 536 500 (résultat calculatrice).

Louis nous dit : « Le résultat est un multiple de 3 » et Yann rétorque : « Les deux derniers chiffres doivent être dans la table de 3 ! ». Yann doit confondre avec les multiples de 4. J'annonce donc que 112 est alors un multiple de 3 selon la règle énoncée par Yann. Est-ce vrai ? Avec la calculatrice $112 \div 3 \approx 37,333$

Alors comment reconnaître un multiple de trois ? La réponse ne vient pas. Je leur demande : « Comment reconnaître les multiples de deux ? Les multiples de 5 ? Et de 9 ? »

Finalement ils retrouvent le critère concernant la somme des chiffres. On imagine que si personne n'avait retrouvé la règle, je leur aurais demandé d'aller chercher dans leur livre, ou sur internet.

Revenons au problème.

Lorsqu'on fait la somme des chiffres de 282 429 536 500, on trouve 46 qui n'est pas multiple de 3. Donc le nombre trouvé par la calculatrice n'est pas multiple de 3 ce qui est impossible pour 3^{24} .

Nous essayons de vérifier si les nombres trouvés par la calculatrice à partir de 3^{21} sont multiples de 3. Nous trouvons :

Au bout de	Nombre trouvé par la calculatrice	Multiple de 3
21 h	10 460 353 200	oui
22 h	31 381 059 610	non
23 h	94 143 178 830	oui
24 h	282 429 536 500	non

Mai 2012

Certains élèves pensent que si le nombre est multiple de 3 alors le résultat de la calculatrice est juste. Je leur propose donc de réfléchir au brouillon sur le problème suivant :

« Est-ce que 3^4 est égal à 333 ? 333 est-il multiple de 3 ? ». Un débat est alors amorcé. 333 est multiple de 3 (3×111) mais n'est pas égal à 3^4 qui vaut $3 \times 3 \times 3 \times 3$ c'est à dire 81.

Nous ne pouvons pas affirmer que si les résultats trouvés par la calculatrice sont multiples de 3 alors ils sont justes. Ce raisonnement n'est pas vraiment facile pour beaucoup d'élèves et pose problème.

Comment trouver alors la valeur de 3^{24} sans ordinateur ?

Nous pouvons poser les multiplications à la main (idée de Caroline, élève très en difficulté en mathématiques).

Retour en groupes :

Les groupes essaient de trouver à la main les résultats...

Certains disent que c'est trop long...

Je leur réplique « Alors trouve un moyen pour aller plus vite... ».

Tous les groupes finissent par trouver les résultats en les effectuant à la main et en faisant des regroupements.

The image shows a handwritten multiplication of 3686784401 by 3. The calculation is performed on a grid with horizontal lines. The numbers are written in black ink. To the right of the main calculation, there are several small numbers (1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2) that appear to be carry-over values or indicators for regrouping. The final result of the multiplication is 11060353203.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{3 \times 3 \times 3 \times 3} \\
 3686784401 \\
 \times \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 04603653203 \\
 \hline
 13810959609 \\
 \hline
 30632868827 \\
 \hline
 11060353203
 \end{array}$$

Mai 2012

Ou encore...

$$\begin{array}{r}
 43046721 \\
 \times \quad 10561 \\
 \hline
 43046721 \\
 + \quad 258280326 \cdot \\
 + \quad 215233605 \cdot \cdot \\
 + \quad 258280326 \cdot \cdot \cdot \\
 \hline
 282429536481
 \end{array}$$

Ou

$$\begin{array}{r}
 3486784401 \\
 \times \quad 81 \\
 \hline
 3486784401 \\
 27894275208 \cdot \\
 \hline
 282429536481
 \end{array}$$

Le groupe qui avait déjà entamé cette méthode continue son raisonnement et arrive au résultat assez rapidement. Je lui donne donc des exercices d'application sur la définition d'une puissance.

Travail pour la séance suivante : exercices sur la définition et la notation des puissances (exercices du livre).

Séance 4 : Plénière

Correction des exercices.

Exercices sur la différence entre a^n et $a \times n$.

Fin de la correction de l'activité sur les bactéries, le groupe le plus en avance explique que pour obtenir 3^{24} nous pouvons faire $3^{20} \times 3^4$.

Nous nous arrêtons pour travailler cette propriété.