DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE ROTATION DE L'ESPACE VECTORIEL

REMARQUE PRÉLIMINAIRE :

Si $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice (antisymétrique) d'un endomorphisme f, alors on vérifie par le calcul que :

$$f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x} \qquad où \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Soit R la matrice de la rotation $r = rot(\vec{u}, \theta)$. Notons :

- $\vec{u}$ un vecteur normé et invariant (qui dirige l'axe)
- $\vec{v}$ un vecteur normé quelconque de $Vect(\vec{u})^{\perp}$
- $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

En évaluant sur chacun des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on montre que :

$$r(\vec{x}) = \vec{x}\cos\theta + (1-\cos\theta)(\vec{u}.\vec{x})\vec{u} + \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \vec{x}).$$

En décomposant r en ses parties symétrique et antisymétrique :

$$r = \frac{r + r^*}{2} + \frac{r - r^*}{2}$$

on voit que sa partie antisymétrique est l'endomorphisme :

$$\frac{r - r^*}{2} : \quad \vec{x} \longmapsto \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \vec{x}).$$

Comme on l'a rappelé ci-dessus, un endomorphisme antisymétrique est de la forme

$$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \wedge \vec{x},$$

on en déduit que : $\vec{a} = \sin\theta\,.\vec{u}$.

POUR DÉTERMINER LES ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES DE LA ROTATION $r = rot(\vec{u}, \theta)$,

a) On forme la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}\left(R - {}^{t}R\right)$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

b) On pose : $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ où $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c) On détermine la mesure de θ en utilisant la trace :

$$2\cos\theta + 1 = tr(R) \qquad \text{et le fait que} \qquad \sin\theta = \|\vec{a}\| > 0.$$

EXEMPLE : Dans le sujet d'Agrégation interne 2003 (sur le dodécaèdre), on avait :

- $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où : $\frac{1}{2}\left(R - {}^{t}R\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$ car $2\cos\theta + 1 = 0$ et $\sin\theta > 0$.