

**Isabelle NOYGUES**

UE 5 : Mémoire écrit sous la direction de

Monsieur Philippe Dauriac

Professeur de mathématiques à l'ESPE

**La pascaline :**

**Quel(s) usage(s) et quel(s) apport(s) dans  
l'apprentissage de la numération décimale de  
position au cycle 2, dans le cadre défini par les  
nouveaux programmes de l'école élémentaire ?**

*FORMATION CONTINUE DIPLÔMANTE (15)*

*Master MEEF 1<sup>er</sup> degré*

*Année universitaire 2016/2017*

## Remerciements

Ce mémoire est le résultat de trois années de réflexion au sein du groupe MPSA « pascaline » concernant le rôle que pouvait jouer l'outil pascaline dans la connaissance de notre système de numération pour des élèves de l'école élémentaire et du collège.

Ce groupe, créé en 2013-2014 à l'initiative de l'IREM de Clermont-Ferrand et de la MPSA, est constitué d'enseignants chercheurs, d'enseignants du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> degrés et de conseillers pédagogiques.

De nombreuses personnes ont contribué à la genèse et au bon déroulement de ce parcours de formation professionnelle.

En premier lieu, je n'aurais jamais pu mener à bien cet investissement sans le concours de mes supérieurs hiérarchiques successifs qui ont accepté mes demandes d'autorisations d'absences pour aller rendre compte et échanger autour de mes expériences de classe à la MPSA, à l'ESPE d'Aurillac, à Mauriac lors de stages de formation continue sur la « Numération au cycle 2 » ainsi que lors du 43<sup>ème</sup> colloque de la COPIRELEM au Puy-en-Velay.

Je me permets donc de remercier Madame Marilyne Lutic, DASEN du Cantal, et Madame Monique Vivenot, IEN de la circonscription d'Aurillac 2.

J'adresse aussi toute ma gratitude à Isabelle Dumont qui, en 2014 alors conseillère pédagogique généraliste de ma circonscription, m'a donné l'opportunité de prendre part à cette réflexion et de tester cet outil dans ma classe.

Je remercie également tous les collègues avec qui j'ai eu des échanges fructueux concernant ce projet : ceux du groupe MPSA, ceux rencontrés lors des stages de formation continue sur la numération, ceux rencontrés lors du colloque de la COPIRELEM en 2016 ainsi que ceux de l'école de Saint-Mamet-La-Salvetat où j'enseigne. Je citerai particulièrement Monique Demas, maîtresse E du RASED, qui est intervenue en co-intervention dans ma classe ainsi que Pierre Okotnikoff, conseiller pédagogique spécialisé AESH de la circonscription d'Aurillac 1, pour leur disponibilité et leur précieux discours.

Je remercie Thierry Lambre, directeur de l'IREM, et toute l'équipe de la MPSA pour leur accueil chaleureux.

Je remercie aussi Sophie Soury-Lavergne, maître de conférences, didacticienne en mathématiques (IFÉ) et membre du groupe MPSA « pascaline », pour son aide et ses conseils notamment lors de la communication pour le colloque de la COPIRELEM en juin 2016.

Je remercie également Annie Noiralise, agrégée de mathématiques, enseignante chercheuse à l'IREM de Clermont-Ferrand et membre du groupe MPSA « pascaline », pour son écoute, ses conseils, ses relectures attentives et formatrices, son soutien sans faille lors notamment de nos interventions dans le cadre de la formation continue des professeurs des écoles.

J'ai une pensée particulière pour mes chers élèves de CP qui ont été au centre de cette expérimentation et pour qui j'ai à cœur de me questionner et de me former afin de leur offrir un enseignement de qualité.

J'adresse toute ma reconnaissance à ma famille qui m'a soutenue et encouragée tout au long de cette aventure professionnelle.

Je terminerai par Philippe Dauriac, professeur de mathématiques, qui m'a guidée tout au long de la réalisation de ce mémoire. Il a su être disponible et orienter ma réflexion. Ses lectures ont été attentives et ses conseils, riches d'enseignement. Je lui en suis reconnaissante.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction .....</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1 La Théorie Anthropologique du Didactique.....</b>   | <b>8</b>  |
| <b>1.1 L'organisation mathématique ou praxéologique .....</b>  | <b>8</b>  |
| 1.1.1 Tâche et type de tâche .....   | 9         |
| 1.1.2 Technique .....  | 9         |
| 1.1.3 Technologie .....  | 11        |
| 1.1.4 Théorie.....   | 15        |
| <b>1.2 L'organisation didactique .....</b>   | <b>16</b> |
| 1.2.1 Le moment de la première rencontre avec le type de tâche problématique .....                   | 16        |
| 1.2.2 Le moment de l'exploration du type de tâche et de l'élaboration d'une technique associée ..... | 17        |
| 1.2.3 Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique .....                   | 18        |
| 1.2.4 Le moment du travail de la technique .....   | 18        |
| 1.2.5 Le moment de l'institutionnalisation .....   | 18        |
| 1.2.6 Le moment de l'évaluation .....  | 18        |
| <b>2 Le nombre comme mémoire d'une quantité.....</b>   | <b>20</b> |
| <b>2.1 Présentation du travail conduit avec des élèves de CP .....</b>                               | <b>20</b> |
| 2.1.1 Ce que disent les programmes du cycle 2.....   | 20        |
| 2.1.2 Objectifs de la séance .....   | 20        |
| 2.1.3 Les préliminaires à la séance .....  | 21        |
| 2.1.4 Déroulement de la séance : « Les sons des cubes qui tombent dans la boîte » .....              | 21        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.2</b> | <b>Description de la séance.....</b>  | <b>23</b> |
| 2.2.1      | Première partie : dénombrement de collections de moins de 9 éléments avec la pascaline .....  | 23        |
| 2.2.2      | Deuxième partie : dénombrement de collections de 10 éléments avec la pascaline .....  | 26        |
| 2.2.3      | Troisième partie : dénombrement de collections de plus de 10 éléments avec la pascaline .....   | 30        |
| <b>3</b>   | <b>Qu'est-ce qui est enseigné dans la séance décrite en deuxième partie et comment est-ce enseigné.....</b>   | <b>32</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Description de l'organisation mathématique étudiée permettant de répondre à la question : <i>Qu'est-ce qu'on veut enseigner dans cette séance</i> .....</b>                              | <b>32</b> |
| 3.1.1      | Tâche à accomplir.....  | 32        |
| 3.1.2      | Techniques et Technologie .....   | 33        |
| 3.1.3      | Théorie.....  | 37        |
| <b>3.2</b> | <b>Description de l'organisation didactique permettant de donner des éléments de réponse à la question : <i>Comment s'y est pris le professeur pour enseigner la notion visée</i> .....</b> | <b>37</b> |
| 3.2.1      | Le moment de la première rencontre avec le type de tâche problématique .....  | 37        |
| 3.2.2      | Le moment de l'exploration du type de tâche et de l'élaboration d'une ou des technique(s) associée(s).....  | 38        |
| 3.2.3      | Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique .....  | 39        |
| 3.2.4      | Le moment du travail de la ou des technique(s).....   | 40        |
| 3.2.5      | Le moment de l'institutionnalisation .....  | 40        |
| 3.2.6      | Le moment d'évaluation .....  | 40        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>4</b> | <b>Quel est le rôle joué par la pascaline dans l'apprentissage du principe de décimalité de notre numération au CE1 .....</b> | <b>43</b> |
| 4.1      | Position et décimalité : deux aspects de notre numération nécessaires pour interpréter l'écriture chiffrée d'un nombre .....  | 44        |
| 4.2      | Introduction des Unités de Numération (U.N.) .....  | 45        |
| 4.3      | Intervention de la pascaline dans la connaissance du système décimal de position au CE1.....                                  | 49        |
| 4.3.1    | Objectifs de la séance .....  | 49        |
| 4.3.2    | Organisation matérielle.....  | 49        |
| 4.3.3    | Organisation mathématique.....  | 51        |
|          | <b>Conclusion.....</b>  | <b>57</b> |
|          | <b>Bibliographie.....</b>   | <b>59</b> |
|          | <b>Table des figures.....</b>   | <b>60</b> |

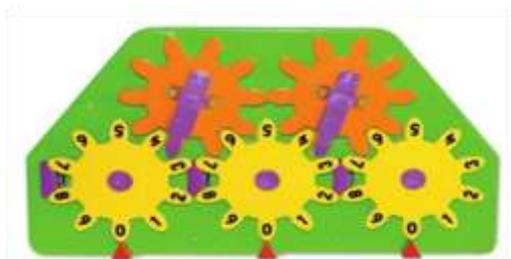
## Introduction

En 1642, le scientifique auvergnat Blaise Pascal a inventé une machine à calculer pour aider son père à répartir les impôts. Ce dernier était à cette époque surintendant de Haute- Normandie au service de Richelieu, premier ministre de Louis XIII.



*Figure 1. La Pascaline de Pascal.*

Depuis 2011, Sophie Soury-Lavergne, maître de conférences et didacticienne en mathématiques à l'Institut Français de l'Éducation (IFÉ) à Lyon, mène un travail de recherche en collaboration avec l'université de Modène en Italie et un groupe d'enseignants de Lyon, de Grenoble et de Dijon. Ce travail porte sur un outil conçu, commercialisé en Italie et inspiré de la Pascaline de Blaise Pascal. Il porte aussi le nom de « pascaline ».



*Figure 2. La pascaline en plastique diffusée par l'association ARPEME.*

En 2013, un groupe de réflexion « pascaline » s'est constitué à l'initiative de l'Institut de Recherche En Mathématiques de Clermont-Ferrand (IREM) et de la Maison Pour la Science en Auvergne (MPSA).

Ce groupe est constitué d'enseignants du 1er degré, du 2nd degré, de conseillers pédagogiques, de chercheurs et de formateurs.

Les expérimentations menées dans les classes et les échanges au sein du groupe ont pour but de comprendre ce que peut apporter l'outil pascaline dans le cadre des apprentissages en numération.

*La première année* (2013-2014), des enseignants du cycle 2 impliqués dans ce projet ont été invités à mettre en œuvre dans leur classe des séances issues du projet IFÉ cité précédemment et de rendre compte de leur expérience.

*La deuxième année* (2014-2015), j'ai eu l'opportunité d'intégrer ce groupe de travail. Comme les autres collègues du cycle 2, je suivais la progression de Cap Maths élaborée par l'équipe de Roland Charnay et éditée chez Hatier. Il a donc été décidé de concevoir au sein de cette progression de nouvelles séances intégrant la pascaline et de les mettre en œuvre dans nos classes.

Ces séances ont ensuite fait l'objet de discussions et de réflexions au sein du groupe MPSA. Ces échanges nous ont amenés à approfondir nos connaissances sur différents thèmes : les fonctions des nombres entiers, les systèmes de numération dont le nôtre, les notions de grandeurs et de mesures, l'articulation modèle-théorie dans l'activité scientifique. En cela, Thierry Lambre, directeur de l'IREM de Clermont-Ferrand, a qualifié la pascaline de « *Cheval de Troie de la numération* » dans le sens où son usage nous a conduits à nous interroger sur notre pratique d'enseignant et sur nos savoirs. Quel(s) rôle(s) pour la pascaline ? Outil pour écrire des nombres, outil pour dénombrer, outil pour conserver le cardinal d'une collection, outil pour calculer (additionner et soustraire) ?

Cet outil pourrait intervenir dans l'apprentissage du dénombrement de collections, dans la compréhension du système décimal de position et des algorithmes des opérations dans ce système de numération.

*La troisième année* (2015-2016), les séances ont été reprises en classe après avoir été analysées dans le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) par Annie Noirfalise, enseignante chercheuse en mathématiques.

*Cette année* (2016-2017), il est question de diffuser les ressources ainsi constituées dans le cadre d'une brochure qui sera publiée par l'IREM à l'attention des enseignants de CP, du CM2 et du collège.

L'outil pascaline a été présenté à l'occasion de différentes formations au cours desquelles nous avons pu faire partager notre expérience. Nous avons effectivement été sollicités dans le cadre d'un stage de formation continue sur la numération au cycle 2 à l'ESPE d'Aurillac en avril 2016, à Mauriac en janvier 2017 ainsi qu'en mai 2016 au Puy-en-Velay lors d'une communication dans le cadre du 43<sup>ème</sup> colloque international de la COPIRELEM sur le thème « Enseigner des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : Quelles orientations ? Quels enjeux ? ».

Tout au long de ce cheminement de formation professionnelle, un questionnement a émergé. Il a été dans un premier temps « naïf » : Pourquoi utiliser la pascaline dans nos classes ? À quoi peut bien servir cet outil dans le cadre des apprentissages numériques ?

Dans un deuxième temps, les lectures personnelles et les apports théoriques ont permis d'affiner ce questionnement pour en faire la problématique de ce mémoire :

**Quel(s) usage(s) et quel(s) apport(s) de la pascaline dans l'apprentissage de la numération décimale de position au cycle 2, dans le cadre défini par les nouveaux programmes de l'école élémentaire ?**

En vue de la publication des documents constitués par le groupe « pascaline » en tant que ressources « clé en main » pour d'autres collègues, il est apparu rapidement nécessaire de rendre ces écrits les plus explicites possibles. Pour ce faire, il a fallu préciser le questionnement dans lequel on se trouve et se placer dans un cadre théorique pertinent afin de produire des connaissances relatives à la problématique poursuivie. La pratique enseignante a donc été modélisée dans le cadre de la TAD. Cette théorie, qui est un exemple de théorie permettant cette modélisation, est exposée dans la première partie de ce mémoire.

La deuxième partie présente une séance conduite au CP où les élèves ont pour tâche de dénombrer une collection inaccessible dont les éléments ne sont connus que par le bruit que fait chacun d'entre eux en tombant dans une boîte métallique. La troisième partie propose une analyse de cette séance dans le cadre de la TAD en vue de mettre en évidence les apports de la pascaline dans le cadre de la connaissance des aspects de notre numération. La dernière partie envisage un prolongement possible de l'usage de la pascaline au CE1 dans le cadre des apprentissages numériques, avec un « zoom » sur les nouveaux programmes de l'école primaire qui mettent en lumière l'importance d'enseigner aussi le principe de décimalité par la mise en évidence des relations qui existent entre les différentes unités de numération.

# 1 La Théorie Anthropologique du Didactique

Le professeur des écoles doit faire preuve de créativité et d'analyse dans le cadre de l'élaboration de ses séquences de classe. Il a à sa disposition différentes références : les instructions officielles, les ouvrages scolaires, les livres du maître, les documents didactiques (Ermel...). Quand il prend connaissance d'une séquence de classe, il va l'analyser pour savoir ce qu'il est intéressant de garder et ce qu'il va modifier en fonction de ce qu'il cherche à enseigner. Pour décrire une situation d'enseignement, il convient de sélectionner certains critères pertinents en fonction de son objectif d'apprentissage. Dans le cadre d'un nouvel apprentissage, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), développée à l'origine par Yves Chevallard, permet un type de modélisation qui va aider l'enseignant à décrire ce qu'il vise : Que souhaite-t-on enseigner dans cette séquence ? Et comment l'enseigner ? Il s'agit d'un modèle possible centré sur le contenu à transmettre qui permet de décrire, d'analyser, d'évaluer et de concevoir les organisations de l'étude dans le cadre de l'institution scolaire.

## 1.1 L'organisation mathématique ou praxéologique

La TAD propose des outils permettant de décrire, du point de vue de la transmission des contenus mathématiques, ce que l'on souhaite enseigner dans le cadre d'une séquence donnée.

L'organisation mathématique ou praxéologique est définie en termes de Tâche/Technique/Technologie/Théorie.

Comme toute activité humaine, l'activité mathématique implique d'accomplir un ensemble de tâches par la mise en œuvre de techniques décrites, explicitées et justifiées par des éléments technologiques et rendues légitimes par des théories auxquelles on se réfère. Chevallard affirme que « *le schéma tâche/technique/technologie/théorie vaut pour toute activité humaine, quelle qu'elle soit.* » (Chevallard, 1996, p.11) On peut en déduire que toute activité humaine peut-être modélisée de la même façon c'est-à-dire par une pratique et un discours sur cette pratique.

Prenons l'exemple d'une tâche à accomplir : réaliser une sauce béchamel. La dimension anthropologique implique qu'en fonction de l'institution dans laquelle on se trouve (la cuisine d'un grand restaurant ou la cuisine familiale), différentes techniques pourront être utilisées pour accomplir cette tâche. Chaque acteur en jeu dans cette situation (le ou la chef étoilé(e), la mère ou le père de famille dans sa cuisine) tentera de théoriser sa « praxis », sa pratique quotidienne, en décrivant la technique qui lui permet de réaliser avec succès cette sauce.

On est ici dans le cadre de la praxéologie en référence à l'analyse de l'action humaine en termes d'efficacité. Il s'agit d'une théorie de la pratique qui vise à articuler des « agirs » de terrain avec des concepts. Ici, chaque protagoniste (dans le cadre de l'institution dans laquelle il pratique) va avoir un discours permettant de décrire « l'agir » qui lui permet de réussir la sauce béchamel.

Revenons au domaine mathématique pour illustrer les propos énoncés précédemment.

### 1.1.1 Tâche et type de tâche

Souvent, la tâche et le type de tâche auquel elle appartient, s'expriment par un verbe d'action à l'infinitif et un complément. Cette expression permet de définir le type de tâche à accomplir.

Voici un exemple en classe de CM1 :

- Tâche à accomplir (elle est contextualisée avec des valeurs) :

effectuer la soustraction  $1302 - 458 =$

- Tâche de type : soustraire deux nombres entiers
- Tâche de genre : soustraire

### 1.1.2 Technique

Comme pour toute activité humaine, à toute tâche mathématique correspond au moins, dans une institution donnée (ici dans une classe donnée de CM1), « *une manière de faire* » pour l'accomplir. (Chevallard, 1998, p.2) Cette manière de faire pour réaliser la tâche en question est appelée « technique » du grec *tekhnê* qui signifie *art*.

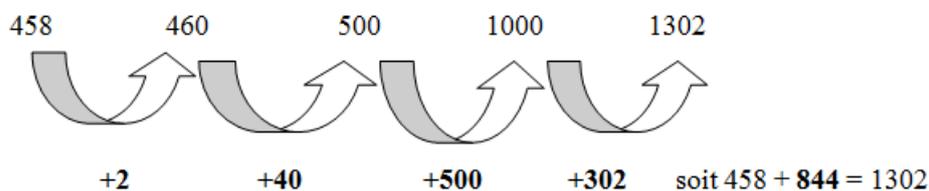
La portée de la technique est variable : une technique peut en effet être supérieure à une autre pour accomplir une tâche de type donné. Il s'agit de l'ensemble des tâches d'un type donné que la technique permet d'accomplir.

Un certain type de tâches et une certaine manière de faire, d'accomplir les tâches de ce type constituent un *savoir-faire*. C'est ce que les didacticiens appellent *le bloc pratico-technique*.

Poursuivons notre exemple. Les techniques utilisées dans la classe peuvent être variées en fonction des apprentissages des classes précédentes (CE1 et CE2).

Chacune de ces techniques peut être justifiée par l'enseignant. Voici donc des manières de faire pour réaliser la tâche en question qui est d'effectuer la soustraction  $1302 - 458 =$

### 1.1.2.1 Technique des sauts pour aller de 458 à 1302 : $458 + \underline{\quad} = 1302$



### 1.1.2.2 Technique de la décomposition additive du nombre à enlever puis soustraire les différents termes successivement

$$458 = 400 + 50 + 8$$

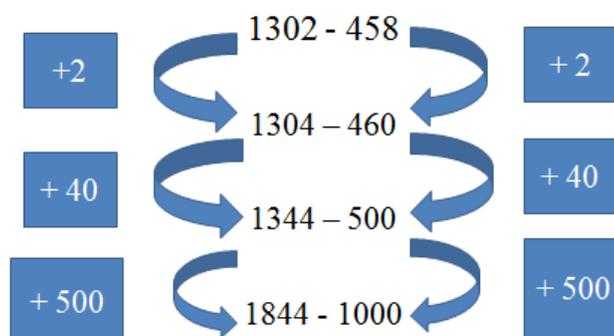
$$1302 - 400 = 902$$

$$902 - 50 = 852$$

$$852 - 8 = 844 \quad \text{soit } 1302 - 458 = 844$$

### 1.1.2.3 Technique de la soustraction à la russe qui consiste à ajouter un même nombre aux deux termes jusqu'à obtenir un nombre « rond » facile à soustraire

Cette technique permet de donner ou redonner du sens à la technique par compensation qui est la technique usuelle de la soustraction en France. En effet, la technique par compensation utilise la même propriété que la soustraction à la russe : la différence entre deux nombres ne change pas quand on ajoute un même nombre aux deux termes de l'opération.



$$\text{Ici, } 1302 - 458 = 1844 - 1000 = 844$$

#### 1.1.2.4 Technique usuelle de la soustraction en France : la technique par compensation

Faire comprendre ici que la différence entre deux nombres ne change pas quand on ajoute un même nombre aux deux termes de l'opération. On parle de conservation des écarts.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 10+3 \quad 10+0 \quad 10+2 \\ - \quad 1+0 \quad 1+4 \quad 1+5 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 8 \quad 4 \quad 4 \end{array}$$

#### 1.1.2.5 Technique opératoire de la soustraction posée : celle appelée « par cassage ou démontage de la centaine, de la dizaine... » ou « technique par emprunt aux chiffres du plus grand nombre »

$$\begin{array}{r} 0 \quad 12 \quad 9 \\ \cancel{1} \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\ - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\ \hline 8 \quad 4 \quad 4 \end{array}$$

### 1.1.3 Technologie

Du grec *tekhnologia*, la technologie est le discours rationnel qui porte sur la technique mise en place pour accomplir une tâche d'un type donné.

Ce discours permet de décrire ce que l'on fait, d'expliquer pourquoi la technique en question permet d'accomplir les tâches du type concerné et de justifier que c'est bien le résultat attendu (fonction technologique). Parfois, ces éléments technologiques permettent de produire le résultat demandé (fonction technique). C'est le cas quand on dit : « si 8 sucettes coûtent 2 euros, 24 sucettes soit 3 fois 8 sucettes coûteront 3 fois plus, soit 3 fois 2 euros c'est-à-dire 6 euros ».

Il est à noter que les techniques utilisées sont souvent devenues tellement communes et partagées dans les institutions où on les utilise qu'elles en paraissent naturelles et non questionnables. De fait, on ne les justifie plus par un discours rationnel et argumenté. Dans ce cas, la technique est alors « la bonne manière de faire » et se suffit à elle-même.

Il s'agit du discours sur la technique permettant d'expliquer pourquoi telle technique est adéquate pour réaliser la tâche en question.

Prenons la dernière technique présentée ci-dessus. Voici le discours technologique permettant d'expliquer ce que l'on fait et permettant de justifier pourquoi cette technique permet d'accomplir le type de tâche concerné.

➤ **La position des chiffres**

Dans la soustraction, la position des chiffres est la même que dans l'addition. Il faut bien aligner les chiffres des unités les uns sous les autres, les chiffres des dizaines les uns sous les autres, les chiffres des centaines les uns sous les autres et les chiffres des unités de mille les uns sous les autres. On écrit donc la soustraction ainsi :

$$\begin{array}{r} 1302 \\ - 458 \\ \hline \end{array}$$

➤ **On s'occupe d'abord des unités simples**

- 2 unités moins 8 unités ce n'est pas possible. Aussi, on prend 1 dizaine de 1302 que l'on échange contre 10 unités. Le chiffre des dizaines étant « 0 » dans 1302, on est obligé de prendre 1 centaine de 1302 que l'on échange contre 10 dizaines.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \cancel{3} 10 2 \\ - 458 \\ \hline \end{array}$$

On a alors 1 unité de mille, 2 centaines, 10 dizaines et 2 unités.

- 2 unités moins 8 unités ce n'est toujours pas possible. On peut maintenant prendre 1 dizaine de 1302 et l'échanger contre 10 unités. On a alors 1 unité de mille, 2 centaines, 9 dizaines et 10 unités plus 2 unités ce qui fait un total de 12 unités.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 9 \\
 1 \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\
 - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

- On peut maintenant soustraire 8 unités. 12 unités moins 8 unités, ça fait 4 unités

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 9 \\
 1 \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\
 - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 4
 \end{array}$$

➤ **On s'occupe maintenant des dizaines.** 9 dizaines moins 5 dizaines, ça fait 4 dizaines

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 9 \\
 1 \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\
 - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 \quad \quad 4 \quad 4
 \end{array}$$

➤ **On s'occupe maintenant des centaines.** 2 centaines moins 4 centaines, ce n'est pas possible.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 9 \\
 1 \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\
 - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 \phantom{1} \quad \phantom{\cancel{3}} \quad \phantom{\cancel{10}} \quad 4 \quad 4
 \end{array}$$

- Aussi, on prend 1 unité de mille de 1302 que l'on échange contre 10 centaines. On a alors 0 unité de mille, 10 centaines et 2 centaines soit 12 centaines. On peut maintenant soustraire 4 centaines. 12 centaines moins 4 centaines, ça fait 8 centaines.

$$\begin{array}{r}
 0 \quad 12 \quad 9 \\
 \cancel{1} \quad \cancel{3} \quad \cancel{10} \quad 12 \\
 - \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 8 \quad 4 \quad 4
 \end{array}$$

- N'ayant plus d'unités de mille, la soustraction est terminée. On peut vérifier si cette soustraction est correcte en faisant une addition :  $458 + 844 = 1302$

### ➤ Synthèse des éléments théoriques

Ici, ce qui permet de justifier que cette technique est efficace pour réaliser la soustraction en question, ce sont les aspects de notre numération.

- *L'aspect positionnel* : dans l'écriture d'un nombre, la valeur des chiffres dépend de leur position. Le « 0 » sert à marquer la position des chiffres quand une unité est absente.

- *L'aspect décimal* relatif à la relation entre les unités des différents rangs : 10 unités d'un certain rang étant égales à 1 unité d'un rang supérieur. En effet, 10 unités simples valent 1 dizaine ; 10 dizaines valent 1 centaine ; 10 centaines valent 1 unité de mille.

### 1.1.4 Théorie

Du grec *theôria*, la théorie est relative aux énoncés théoriques. Elle permet à son tour de justifier, de produire et de rendre compréhensible la technologie pour les personnes responsables des contenus d'enseignement. Par exemple, dans le domaine numérique, il s'agit de la théorie des nombres, elle-même incluse dans la théorie des ensembles. La théorie permet alors de justifier que les nombres entiers, la relation d'ordre sur les nombres entiers et les opérations sur les nombres entiers permettent de comparer deux collections, de prévoir la grandeur de la réunion de deux collections par le biais de la mesure des grandeurs. Cependant, on fait rarement référence à la théorie avec les élèves, surtout dans l'enseignement primaire.

À propos d'un certain type de tâches, le couple technologie-théorie est souvent nommé *un savoir*. C'est ce que les didacticiens appellent *le bloc technologico-théorique*.

Quelles sont les questions auxquelles on peut répondre grâce à la modélisation dans le cadre de la TAD ?

En TAD, dans toute activité humaine, tout nouvel apprentissage vise un savoir-faire et le recours à un savoir sur ce savoir-faire.

Pour toute organisation mathématique enseignée, l'enseignant sera amené à évaluer si la tâche à accomplir est conforme au niveau concerné, si la technique envisagée est adaptée à cette tâche, si les arguments technologiques pour élaborer et justifier la technique sont accessibles aux élèves en fonction de ce qu'ils savent.

## 1.2 L'organisation didactique

Pour favoriser l'étude de l'organisation mathématique définie en amont, l'enseignant se doit d'aménager des conditions matérielles et sociales. La TAD fournit des outils définis en termes de moments permettant de décrire, du point de vue de la transmission des contenus mathématiques, la façon envisagée ou mise en œuvre pour mener à bien l'étude de l'organisation mathématique en question.

Dans l'ensemble des éléments mis en œuvre par l'enseignant, Chevallard propose de repérer six moments, dits moments didactiques qui constitueront « l'organisation didactique. »

Leur description permettra de répondre à la question « *Comment est ou sera enseignée la notion mathématique en question ?* » par cet enseignant et de se poser la question du développement de l'organisation didactique. Il convient donc de repérer ces moments avec leur fonction. Si on ne trouve pas tel(s) moment(s) dans telle séance, il conviendra de s'interroger sur le pourquoi de cette absence. (Chevallard, 1998, pp.19-23)

En effet, certaines contraintes institutionnelles peuvent conduire à supprimer certains moments de l'étude ou à modifier la façon dont ils se passent.

Voici une présentation théorique de ces différents moments didactiques qui sera explicitée dans la troisième partie de ce mémoire relative à l'analyse de la séance de classe présentée. Il convient cependant de préciser que ces moments ne constituent qu'une grille de lecture de l'étude mathématique menée.

Cette grille permettra à l'enseignant de s'interroger sur la séquence qu'il a mise en œuvre et peut-être d'envisager de faire autrement. La modélisation n'est pas une description en termes d'obligations à faire.

### 1.2.1 Le moment de la première rencontre avec le type de tâche problématique

Il s'agit du moment où les élèves vont rencontrer pour la première fois un type de tâche problématique qu'ils vont apprendre à accomplir dans le cadre de l'étude de l'organisation mathématique enseignée. Ce moment peut se dérouler de différentes façons.

Ce peut-être la narration d'une mise en situation : dans la classe d'à côté, pour réaliser la tâche proposée, les élèves ont procédé ainsi. Dans ce cas, le premier rapport à l'objet d'étude étant narratif, il devra être suivi d'une manipulation effective.

Ce peut-être aussi une mise en situation pour permettre aux élèves d'entrer concrètement dans la tâche génératrice de l'organisation mathématique à étudier favorisant l'émergence du concept mathématique sous-jacent. L'existence du savoir à enseigner sera alors motivée par le fait que l'élève sera confronté à une tâche de type familier mais dont l'accomplissement est problématique dans la mesure où la technique dont il dispose à un instant T et qui semble être appropriée n'est pas opérationnelle. Par le biais de variables didactiques, l'enseignant amènera les élèves à faire évoluer leurs techniques pour accomplir la tâche donnée.

Dans l'exemple de la soustraction cité dans l'organisation mathématique décrite ci-dessus, l'enseignant met ses élèves en situation en leur demandant d'effectuer la soustraction :  $1302 - 458 =$

Il convient de préciser qu'ils ont déjà étudié précédemment la soustraction posée sans retenue.

### **1.2.2 Le moment de l'exploration du type de tâche et de l'élaboration d'une technique associée**

Il peut s'agir ici d'une phase de recherche, de tâtonnements pour trouver une technique permettant d'effectuer cette opération. Cette phase peut se dérouler en groupe ou individuellement.

Ce travail pourra être suivi d'un temps de mise en commun afin de permettre à chacun d'explicitier la technique lui ayant permis d'effectuer cette opération.

L'enseignant sera amené enfin à mettre en lumière ce qu'il faut retenir. Il pourra choisir une technique particulière à expliciter. Mais là encore l'enseignant peut choisir de décrire au tableau la technique qu'il veut enseigner.

### **1.2.3 Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique**

Il s'agit du moment où des éléments technologiques justifiés par les connaissances déjà acquises par les élèves, voire par une théorie (ici mathématique), vont permettre de justifier, de contrôler, de produire et de comprendre la pertinence de la technique construite précédemment. Ces éléments peuvent être produits soit par l'enseignant, soit par les élèves. Ils pourront apparaître à différents moments de l'étude.

### **1.2.4 Le moment du travail de la technique**

Il s'agit ici de la phase d'entraînement à l'utilisation de la technique à partir de tâches de même type. Ce moment devrait permettre de rendre la technique la plus fiable possible et ainsi acquérir une plus grande maîtrise dans son utilisation.

### **1.2.5 Le moment de l'institutionnalisation**

Il s'agit du moment où il faut faire le point sur l'essentiel à retenir et décider que certains éléments, certaines stratégies utilisées lors des moments précédents, peuvent être oubliés.

### **1.2.6 Le moment de l'évaluation**

Il s'agit du moment où l'on vérifie que chaque élève, face à une tâche du type de celle entraînée, utilise correctement la technique institutionnalisée pour l'accomplir et éventuellement est capable de justifier son utilisation.

Ces différents moments se retrouvent rarement dans l'ordre de la présentation faite précédemment. Ils peuvent se chevaucher et leur définition ne sert qu'à préciser des fonctionnalités, par rapport à l'avancement d'une organisation mathématique. En effet, ce n'est pas leur temporalité mais leur fonctionnalité qui est importante.

En définissant **le type de tâche** que les élèves doivent apprendre à accomplir, **la ou les technique(s)** à mettre en œuvre pour cela, **les arguments technologiques** et éventuellement **la théorie qui légitime le tout**, on définit **l'organisation mathématique**.

Il s'agit de l'ensemble « *savoir-faire/savoir* » visé par tout nouvel apprentissage. Cette organisation permet en effet **de mettre en évidence ce que l'on souhaite enseigner** au cours d'une séquence donnée.

L'enseignant doit avoir les idées claires sur cette organisation mathématique à étudier afin de pouvoir mettre en place une **organisation didactique**. Cette dernière permettra **de mettre en évidence la façon dont on s'y prend pour enseigner** la notion mathématique en jeu. En effet, l'analyse en termes de moments d'étude permettra de repérer, dans la séquence prévue, les différentes activités qui interviennent dans l'étude de chacun des constituants de l'organisation mathématique et de se poser des questions sur les choix faits :

- Dans la séquence, y a-t-il des activités permettant de remplir la fonction de chacun des moments, sinon pourquoi ?
- Dans les activités proposées, quelle est la part de travail de l'enseignant et celle des élèves ? Ces activités permettent-elles de mettre les élèves en contact avec les raisons d'être de la nouvelle technique étudiée ? Permettent-elles aux élèves d'avoir la technique en main de façon fiable et de percevoir sa portée ?

Dans la partie suivante, nous allons présenter une séance de numération menée en CP avec, entre autres, l'usage de l'outil pascaline. Nous l'analyserons dans la troisième partie avec les outils présentés précédemment.

## 2 Le nombre comme mémoire d'une quantité

Nous allons ici parler du nombre entier comme moyen de « *représenter la quantité.* »

(Margolinas, 2012, p.12)

La séance présentée ci-dessous vise à introduire la pascaline comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec le paquet de dix comme nouvelle unité. Le travail fait au cours de cette séance conduit à préciser que dans l'écriture d'un nombre, le chiffre de gauche indique le nombre de paquets de 10 et celui de droite indique le nombre d'éléments tout seuls.

### 2.1 Présentation du travail conduit avec des élèves de CP

#### 2.1.1 Ce que disent les programmes du cycle 2

Voici les compétences des programmes de 2015, mis en place en 2016, dans le domaine « Nombres et calcul »:

« - *Utiliser diverses stratégies de dénombrement : utilisation d'unités intermédiaires dizaines, centaines...*

- *Faire le lien entre le rang dans une liste et le nombre d'éléments qui le précède. Relation entre ordinaux et cardinaux.*

- *Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures. »*

#### 2.1.2 Objectifs de la séance

- Construire l'aspect cardinal du nombre : le nombre mémoire d'une quantité, commun à plusieurs collections.

- Utiliser différents outils pour dénombrer des collections ayant : au plus 9 éléments (1ère partie), 10 éléments (2ème partie), plus de 10 éléments (3ème partie).

- Prendre conscience de l'importance du nombre 10 pour représenter ici les nombres de 11 à 19.

### **2.1.3 Les préliminaires à la séance**

- L'outil pascaline a été introduit dès la première semaine de classe, lors des rituels du matin, comme outil de dénombrement des jours de classe écoulés pour chaque mois en cours.
- Les deux premières séances ont été consacrées à l'introduction de la pascaline comme objet technique.
- Les séances 3 et 4 ont permis une familiarisation avec le maniement de l'objet au travers d'activités de dénombrement.

### **2.1.4 Déroulement de la séance : « Les sons des cubes qui tombent dans la boîte »**

La séance décrite ci-dessous, concerne l'utilisation de la pascaline comme outil de dénombrement de collections au-delà de 10 éléments, en appui sur la dizaine.

#### **2.1.4.1 Une séance en trois parties**

Conduite vers octobre-novembre, elle se déroule en trois temps :

- Dénombrer des collections de moins de 9 éléments
- Dénombrer des collections d'au moins 10 éléments en partant d'une collection de 9 éléments
- Dénombrer des collections de plus de 10 éléments.

### 2.1.4.2 Un travail par groupe de 4/5 élèves avec un outil spécifique par élève



**Groupe 1** : une pascaline par élève



**Groupe 2** : une bande numérique par élève

**Groupe 3** : une collection de bâtonnets de glace « en vrac » par élève

(+ élastiques pour faire les paquets de 10)



**Groupe 4** : une ardoise par élève sur laquelle représenter une collection de croix



Des cubes et une boîte métallique pour l'enseignante

*Figure 3. Outils matériels pour le dénombrement. De haut en bas : une pascaline, une bande numérique, un lot de bâtonnets avec des élastiques et une barquette, une ardoise et un feutre, des cubes et une boîte métallique.*

## 2.2 Description de la séance

### 2.2.1 Première partie : dénombrement de collections de moins de 9 éléments avec la pascaline

*Les durées indiquées sont approximatives et peuvent varier.*

| Ce que fait et dit le professeur.  | Ce que font et disent les élèves.  | Durée        |
|--|--|--------------|
| <p><i>Mise en place</i> : Le professeur constitue les groupes et distribue à chacun un outil de dénombrement.</p>  | <p>Les élèves s'installent et manipulent un temps leur outil respectif avant de se mettre en situation de travailler.</p>  | <p>4 min</p> |
| <p><i>Mise en situation</i> :</p> <p>Il montre que sa boîte est vide et demande aux élèves de « mimer » cette situation sur leur outil respectif :</p> <p>« Ma boîte est vide. Mimez cet état sur votre outil. »</p> <p>Puis il passe dans les rangs pour s'assurer que chaque outil a été « initialisé » avant de commencer.</p>  | <p>Chaque élève exécute la consigne.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- sur la pascaline, toutes les roues sont mises à « 0 »</li> <li>- sur la bande numérique, le doigt est sur le « 0 », point de départ du jeu</li> <li>- la boîte de bâtonnets est vide</li> <li>- sur l'ardoise, rien n'est dessiné</li> </ul> | <p>2 min</p> |
| <p>Il demande à un élève de chaque groupe de verbaliser la situation relative à son outil.</p>   | <p>« Toutes les roues de ma pascaline sont à 0. »</p> <p>« Mon doigt est sur le 0 de la bande numérique. »</p> <p>« Ma boîte de bâtonnets est vide. »</p> <p>« Rien n'est dessiné sur mon ardoise. »</p>   | <p>2 min</p> |
| <p><i>Consigne</i> : « Je vais mettre des cubes dans une boîte en les faisant tomber les uns après les autres (<i>jusqu'à 9 : information à ne pas donner aux élèves</i>). Vous ne me verrez pas faire cette action car je serai derrière vous au fond de la classe. Je ne parlerai pas. Vous allez simplement entendre les bruits produits par les cubes tombant dans la boîte.</p> | <p>Un élève de chaque groupe est invité à reformuler la consigne.</p>  | <p>2 min</p> |

|  |  |              |
|--|--|--------------|
| <p>« Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte, vous entendrez 1 bruit et vous devrez :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- sur la pascaline, faire 1 clic sur la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre à chaque bruit de cube tombant dans la boîte</li> <li>- sur la bande numérique, avancer votre doigt d'1 case à chaque bruit de cube tombant dans la boîte</li> <li>- avec la collection de bâtonnets de glace, mettre 1 bâtonnet dans votre boîte à chaque bruit de cube tombant dans la boîte</li> <li>- avec l'ardoise, dessiner une croix à chaque bruit de cube tombant dans la boîte</li> </ul> <p>Quand je m'arrêterai, vous devrez me dire combien il y a de cubes dans ma boîte. »</p>  | <p>Ensuite, tous les élèves tournent le dos au professeur qui est au fond de la classe. Ils ne le regardent pas et se concentrent sur les bruits faits par les cubes tombant dans la boîte. À chaque bruit entendu, chaque élève agit sur son outil comme indiqué par le professeur.</p> |              |
| <p><i>Mise en commun :</i></p> <p>Quand le professeur a mis 9 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge un élève par groupe :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- avec la bande numérique : « Où se trouve ton doigt sur la bande numérique ? » Lire le nombre désigné par le doigt.</li> <li>- avec la pascaline : « Quel est le nombre affiché sur la pascaline ? » Lire le nombre désigné par les repères triangulaires.</li> <li>- avec la collection de bâtonnets : « Combien y a-t-il de bâtonnets dans ta boîte ? »</li> </ul> <p>Dénombrer la collection de bâtonnets et indiquer à l'oral la quantité de bâtonnets présents dans la boîte.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- avec l'ardoise : « Combien de croix as-tu dessinées sur ton ardoise ? » Dénombrer la collection de croix dessinées et indiquer à l'oral la quantité de croix dessinées.</li> </ul> | <p>Chaque élève interrogé répond au professeur :</p> <p>« Mon doigt est sur le 9. »</p> <p>« Je lis 9 sur la pascaline. »</p> <p>« J'ai 9 bâtonnets dans ma boîte. »</p> <p>« J'ai dessiné 9 croix sur mon ardoise. »</p>  | <p>15min</p> |

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>Il demande ensuite à un autre élève par groupe d'expliquer la technique ayant permis avec son outil de réaliser la tâche demandée, la technique utilisée pour faire « et encore 1 ».</p> <p>Il faut rappeler ici que la description de la technique en fonction de chaque outil a été donnée par le professeur en début de séance.</p> <p>Dans son discours, le professeur a aussi introduit des éléments permettant de justifier la technique.</p> | <p>Chaque élève interrogé répond au professeur :</p> <p>« J'ai fait 1 clic sur la roue jaune de droite de la pascaline dans le sens des aiguilles d'une montre à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. »</p> <p>« J'ai avancé mon doigt d'1 case sur la bande numérique à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. »</p> <p>« J'ai mis 1 bâtonnet dans ma boîte à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. »</p> <p>« J'ai dessiné une croix sur mon ardoise à chaque bruit de cube tombant dans la boîte. »</p> |  |
| <p>Puis il questionne les élèves pour savoir :</p> <p>« À quoi correspond ce nombre ? »</p>  | <p>Les élèves répondent :</p> <p>« C'est 9 clics fait sur la roue jaune de droite de la pascaline. »</p> <p>« C'est 9 bâtonnets mis dans la boîte. »</p> <p>« C'est 9 cases parcourues sur la bande numérique. »</p> <p>« C'est 9 croix dessinées sur l'ardoise. »</p> <p>« C'est 9 cubes tombés dans la boîte. C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte.»</p>  |  |
| <p>Il poursuit son questionnement : « Comment vérifier que 9 c'est bien 9 cubes présents dans sa boîte ? »</p>   | <p>Les élèves proposent de dénombrer effectivement la collection de cubes présents dans la boîte du professeur.</p>  |  |
| <p><i>Synthèse de cette première partie</i> : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ?</p> <p>C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée.</p>   | <p>Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte.</p> <p>(avec l'aide du professeur pour la mise en place photographiée ci-dessous)</p>  |  |

Le professeur amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d'éléments et que la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections (9).

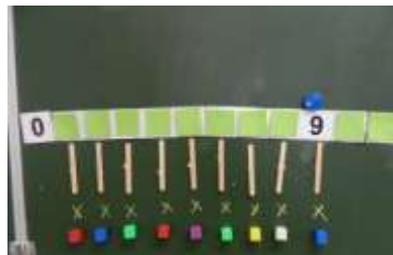


Figure 4. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 9.

### 2.2.2 Deuxième partie : dénombrement de collections de 10 éléments avec la pascaline

| Ce que fait et dit le professeur.   | Ce que font et disent les élèves.  | durée |
|---|--|-------|
| <p><i>Situation de chaque outil à la fin de la première partie.</i></p>   | <p>Chaque élève conserve son outil de départ dans l'état où il était en fin de première partie :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la pascaline affiche « 9 »</li> <li>- le doigt est sur le « 9 » de la bande numérique</li> <li>- il y a 9 bâtonnets dans la boîte</li> <li>- 9 croix sont dessinées sur l'ardoise</li> </ul> |       |
| <p><i>Consigne.</i> Le professeur met dans la boîte où il y a déjà 9 cubes, 1 cube supplémentaire.</p> <p>« Je poursuis le jeu. Je continue à mettre des cubes dans ma boîte. Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte, vous entendrez 1 bruit et vous devrez agir sur votre outil. »</p> | <p>Chaque élève conserve son outil de départ et agit dessus pour faire « et encore 1 ».</p>  | 2min  |

|  |  |              |
|--|--|--------------|
| <p><i>Mise en commun.</i> Quand le professeur a mis 10 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge <b>d'abord</b> les groupes qui n'ont pas la pascaline :</p> <p>- avec la bande numérique : « Où se trouve ton doigt sur la bande numérique ? » Lire le nombre désigné par le doigt.</p> <p>- avec la collection de bâtonnets : « Combien y a-t-il de bâtonnets dans ta boîte ? »</p> <p>Dénombrer la collection de bâtonnets et indiquer à l'oral la quantité de bâtonnets présents dans la boîte.</p> <p>- avec l'ardoise : « Combien de croix as-tu dessiné sur ton ardoise ? » Dénombrer la collection de croix dessinées et indiquer à l'oral la quantité de croix dessinées.</p> | <p>Chaque élève interrogé répond au professeur :</p> <p>« Mon doigt est sur le 10. »</p> <p>« J'ai 10 bâtonnets dans ma boîte. »</p> <p>« J'ai dessiné 10 croix sur mon ardoise. »</p>   | <p>15min</p> |
| <p>Un élève par groupe est interrogé :</p> <p>« Combien de cubes y a-t-il dans la boîte ? »</p> <p>Le professeur insiste pour que chaque élève verbalise de façon précise ce qu'il a fait, quel est l'état de sa collection et le lien avec la collection de cubes.</p>  | <p>Chaque élève interrogé répond au professeur :</p> <p>- sur la bande numérique : « 9 et encore 1 ça fait 10. Je suis sur la case 10. J'ai avancé de 10 cases. Il y a 10 cubes dans la boîte. »</p> <p>- avec les bâtonnets : « 9 et encore 1 ça fait 10. J'ai 10 bâtonnets dans ma boîte. Il y a 10 cubes dans la boîte. »</p> <p>- avec les croix : « 9 et encore 1 ça fait 10. J'ai dessiné 10 croix. Il y a 10 cubes dans la boîte. »</p> |              |
| <p>Puis il questionne les élèves pour savoir :</p> <p>« À quoi correspond ce nombre ? »</p>  | <p>Les élèves répondent :</p> <p>« C'est 10 bâtonnets mis dans la boîte. »</p> <p>« C'est 10 cases parcourues sur la bande numérique. »</p> <p>« C'est 10 croix dessinées sur l'ardoise. »</p> <p>« C'est 10 cubes tombés dans la boîte. »</p>   |              |

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>Il poursuit son questionnement : « Comment vérifier que 10 est bien la mesure de la quantité de cubes présents dans sa boîte ? »</p>  | <p>Les élèves proposent de dénombrer effectivement la collection de cubes présents dans la boîte du professeur.</p>  |  |
| <p><b>Ensuite</b>, il demande au groupe ayant la pascaline : « Où lisez-vous 10 ? »</p> <p>Demander à un élève de venir le montrer à toute la classe.</p>  | <p>Un élève vient au tableau pour montrer où il lit le nombre 10 (soit sur sa pascaline, soit sur la pascaline papier en format A3 plastifiée affichée au tableau sur laquelle il écrira au feutre effaçable 10, soit sur la e-pascaline projetée si possible).</p>  <p><i>Figure 5. Affichage de la pascaline pour le nombre 10.</i></p>  <p><i>Figure 6. Au tableau, image papier en format A3 de la pascaline avec affichage du nombre 10.</i></p> |  |
| <p>Il pose la question suivante au groupe pascaline : « Comment ça s'est passé pour passer de 9 à 10 ? Pour faire 9 et encore 1 ? » On peut supposer qu'ils aient ressenti une force sur la roue jaune de droite quand la roue jaune du milieu s'est mise à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour afficher 10.</p>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Des élèves ont dit qu'ils avaient senti « que ça forçait »</li> <li>- À partir de là, tous les élèves prennent une pascaline, la mettent sur 9 et effectuent le rajout d'une unité pour observer ce qui a été décrit ci-contre.</li> </ul>  |  |
| <p>Il tente de mettre en relation l'apparition de 1 sur la roue jaune du milieu avec les 10 cubes, les 10 bâtonnets, les 10 croix et les 10 premières cases parcourues sur la bande numérique. L'action décrite ci-contre permettra de bien faire le lien entre le paquet des 10 premières cases ainsi parcourues, le nombre 10 ainsi atteint sur la bande numérique et l'affichage 1 sur la roue jaune du milieu et de 0 sur la roue jaune de droite.</p> | <p>Pour cela, un élève vient pointer du doigt les 10 premières cases les unes après les autres sur la bande numérique affichée au tableau, alors que simultanément les autres élèves, avec leur pascaline, tournent la roue jaune de droite d'un clic dans le sens des aiguilles d'une montre. L'élève entoure les 10 cases ainsi parcourues.</p>  |  |

*Synthèse de cette deuxième partie* : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ?

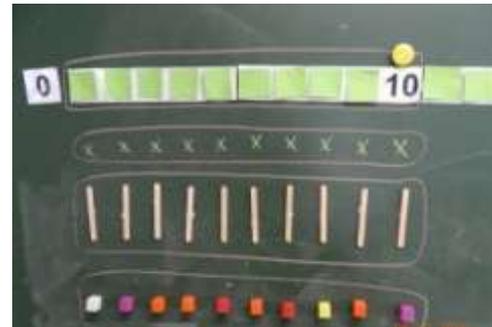
C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée.

Le professeur amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d'éléments et que la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections (10).

Leur préciser, s'ils ne l'ont pas remarqué, que la roue jaune du milieu indique le nombre de paquets de 10 : ici, 1 paquet de 10.

Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte.

(avec l'aide du professeur pour la mise en place photographiée ci-dessous)



Chaque élève sera amené à matérialiser ce paquet de 10 avec son matériel.

*Figure 7. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 10.*

### 2.2.3 Troisième partie : dénombrement de collections de plus de 10 éléments avec la pascaline

| Ce que fait et dit le professeur.  | Ce que font et disent les élèves.  | durée |
|--|--|-------|
| <p><i>Situation de chaque outil à la fin de la deuxième partie avant d'explorer d'autres tâches analogues (lors d'une autre séance, on pourra recommencer avec des ajouts supérieurs à 1 unité).</i></p>   | <p>Chaque élève conserve son outil de départ dans l'état où il était en fin de deuxième partie :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- la pascaline affiche « 10 »</li> <li>- le doigt est sur le « 10 » de la bande numérique</li> <li>- il y a 10 bâtonnets dans la boîte</li> <li>- 10 croix sont dessinées sur l'ardoise</li> </ul>   |       |
| <p><i>Consigne.</i> Le professeur met dans la boîte où il y a déjà 10 cubes, 1 cube supplémentaire :</p> <p>« Je poursuis le jeu. Je continue à mettre des cubes dans ma boîte.</p> <p>Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte, vous entendrez 1 bruit et vous devrez agir sur votre outil. »</p>   | <p>Chaque élève conserve son outil de départ et agit dessus pour faire « et encore 1 ».</p>  | 2min  |
| <p><i>Mise en commun :</i></p> <p>Quand le professeur a mis 11 cubes dans sa boîte, il passe dans les rangs pour repérer d'éventuelles erreurs de dénombrement puis il interroge <b>d'abord</b> les groupes qui n'ont pas la pascaline :</p> <p>« Combien de cubes y a-t-il dans la boîte ? »</p> <p>« À quoi correspond ce nombre ? »</p> <p>Le professeur demande d'expliciter la technique mise en place.</p> | <p>Chaque élève interrogé répond au professeur :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- sur la bande numérique : « 10 et encore 1 ça fait 11. Je suis sur la case 11. J'ai avancé de 11 cases. Il y a 11 cubes dans la boîte. »</li> <li>- avec les bâtonnets : « 10 et encore 1 ça fait 11. J'ai 11 bâtonnets dans ma boîte. Il y a 11 cubes dans la boîte. »</li> <li>- avec les croix : « 10 et encore 1 ça fait 11. J'ai dessiné 11 croix. Il y a 11 cubes dans la boîte. »</li> </ul> | 15min |

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p><b>Ensuite</b>, il demande au groupe ayant la pascaline : « Où lisez-vous 11 ? » Demander à un élève de venir le montrer à toute la classe.</p>   | <p>Un élève vient au tableau pour montrer où il lit le nombre 11 (soit sur sa pascaline, soit sur la pascaline papier en format A3 plastifiée affichée au tableau sur laquelle il écrira au feutre effaçable 11, soit sur la e-pascaline projetée si possible).</p>  |  |
| <p>Il pose la question suivante au groupe pascaline : « Que s'est-il passé quand vous avez fait l'ajout <i>et encore 1</i> ? »</p>   | <p>Des élèves ont dit que la roue jaune du milieu n'a pas tourné. Seule la roue jaune de droite a tourné d'un clic de plus dans le sens des aiguilles d'une montre.</p>  |  |
| <p>Il pose la question suivante : « Que représente ce nombre ? »</p>   | <p>Les élèves indiquent que le 1 sous la roue jaune du milieu indique 1 paquet de 10 (bâtonnets, croix, cases, clics ou cubes) et le 1 sous la roue jaune de droite indique 1 tout seul (1 bâtonnet, 1 croix, 1 case, 1 clic ou 1 cube).</p>   |  |
| <p><i>Synthèse de cette troisième partie</i> : Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ?</p> <p>C'est la mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées qui permettra de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée.</p> <p>Le professeur amènera donc les élèves à remarquer que ces collections ont la même quantité d'éléments et que la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de ces collections (11).</p> | <p>Un élève de chaque groupe viendra au tableau mettre en relation terme à terme la collection intermédiaire qu'il a constituée avec la collection de cubes présents dans la boîte.</p> <p>(avec l'aide du professeur pour la mise en place photographiée ci-dessous)</p>  <p><i>Figure 8. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 11.</i></p> |  |

Dans la troisième partie de ce mémoire, la modélisation dans le cadre de la TAD va permettre de mettre en évidence ce que l'enseignant vise dans cette séance en terme d'objectif d'apprentissage et comment il s'y prend.

### **3 Qu'est-ce qui est enseigné dans la séance décrite en deuxième partie et comment est-ce enseigné**

Pour répondre à ces deux questions, nous allons utiliser les outils de la modélisation de la TAD.

Rappelons que les élèves ont à dénombrer une collection inaccessible. Pour se faire, ils vont avoir à leur disposition quatre outils de dénombrement qui vont leur permettre de constituer une collection intermédiaire accessible et équipotente à la collection initiale de cubes :

- la pascaline,
- la bande numérique,
- les bâtonnets de glace
- et les croix.

#### **3.1 Description de l'organisation mathématique étudiée permettant de répondre à la question : *Qu'est-ce qu'on veut enseigner dans cette séance***

##### **3.1.1 Tâche à accomplir**

Il s'agit de dénombrer une collection inaccessible (qu'on ne voit pas) dont les éléments ne sont connus que par le bruit que fait chacun d'entre eux en tombant dans une boîte opaque.

À partir de la deuxième partie de cette séance de classe, il s'agit d'un dénombrement en paquets de 10 et éléments tout seuls. **L'apprentissage se centre sur l'accomplissement de cette tâche avec la pascaline.**

### 3.1.2 Techniques et Technologie

Dès le début de la séance, le professeur décrit l'action à réaliser avec chacun des quatre outils présentés précédemment. À chaque outil correspond une technique permettant d'accomplir la tâche en question décrite par le professeur .

#### 3.1.2.1 Description des techniques

Les techniques T en jeu seront notées ici T1, T2, T3 et T4 afin de faciliter la compréhension du lecteur. Voici, reporté en italique, le discours du professeur concernant ces techniques: « *Je vais mettre des cubes dans une boîte en les faisant tomber les uns après les autres. Vous ne me verrez pas faire cette action car je serai derrière vous au fond de la classe. Je ne parlerai pas. Vous allez simplement entendre les bruits produits par les cubes tombant dans la boîte.*

*Vous allez accompagner mes actions c'est-à-dire qu'à chaque fois que je mettrai 1 cube dans la boîte, vous entendrez un bruit et vous devrez agir avec votre matériel :*

*sur la pascaline vous ferez un clic sur la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre (T1), sur la bande numérique vous avancerez d'une case (T2), vous mettrez un bâtonnet dans votre boîte (T3), vous dessinerez une croix sur votre ardoise (T4).*

*Quand je m'arrêterai, vous lirez le nombre affiché sur la pascaline en face des repères triangulaires ainsi que le nombre sur lequel se trouve le doigt sur la bande numérique, vous dénombrez les croix, les bâtonnets afin de me dire combien il y a de cubes dans ma boîte. »*

**L'objet d'apprentissage est ici la technique de dénombrement avec la pascaline. Les trois autres techniques, pour leur part, rentrent dans les éléments technologiques qui permettront de justifier la technique dont l'apprentissage est visé.**

Dans son discours, le professeur introduit aussi des éléments permettant de justifier les techniques. On ne peut donc pas ici dissocier techniques et technologie.

### 3.1.2.2 Discours justifiant les techniques

Ce discours permet de répondre aux questions suivantes :

- Qu'est-ce qui permet de justifier la validité des techniques mises en œuvre pour accomplir la tâche en question ?
- Qu'est-ce qui fait qu'en faisant une collection de clics, une collection de croix, une collection de bâtonnets, une collection de cases, on a eu en définitive le nombre d'objets de la collection inaccessible de cubes dans la boîte ?
- Pourquoi les techniques sont-elles adéquates pour justifier la réalisation de la tâche ?

Le dénombrement des collections intermédiaires va permettre de connaître le cardinal de la collection de cubes.

La réponse à ces questions est donnée par la mise en évidence d'une correspondance terme à terme entre les collections intermédiaires ainsi constituées, qu'elles soient éphémères (collection de cases et collection de clics) ou permanentes (collection de bâtonnets, collection de croix et collection de cubes).

**En effet**, les collections de cubes dans la boîte, de croix dessinées, de bâtonnets, de cases parcourues, de clics sont en correspondance terme à terme. Ces collections correspondent à une même quantité d'objets, leur nombre d'éléments est le même nombre entier.

La correspondance terme à terme justifie la validité des techniques mises en place pour accomplir la tâche en question.

Au tableau, cette correspondance terme à terme est mise en évidence de la façon suivante :



(Figure 8, p.31)

Il y a **la même quantité** de clics matérialisés par le nombre inscrit sur la pascaline, de cases parcourues sur la bande numérique, de bâtonnets mis dans la boîte, de croix dessinées, que de cubes tombés dans la boîte.

- Le nombre affiché sur la pascaline en face des repères triangulaires représente la collection de clics produits et le nombre de cubes tombés dans la boîte.

- Le nombre sur lequel se trouve le doigt sur la bande numérique représente le nombre de cases parcourues et le nombre de cubes tombés dans la boîte.

- Le nombre de bâtonnets mis dans la boîte représente le nombre de cubes tombés dans la boîte.

- Le nombre de croix dessinées représente le nombre de cubes tombés dans la boîte.

Pour vérifier s'il s'agit du nombre de cubes présents dans la boîte, on va effectivement dénombrer la collection de cubes dans la boîte, la collection de croix dessinées, la collection de bâtonnets, la collection de cases sur lesquelles on a avancé, la collection de clics. Cette validation contrôle la pertinence des techniques utilisées pour accomplir correctement la tâche demandée.

Cette validation, qui conduit à dénombrer directement la collection, n'est pas de même nature que celles qui sont évoquées au-dessus :

- les validations basées sur les correspondances terme à terme mettent à distance la collection à dénombrer,

- le dénombrement en manipulant la collection elle-même fait appel à une technique connue et familière aux élèves de ce niveau, de fait il peut avoir un poids important dans la justification de la technique étudiée. Cette validation les rassure.

Dans la mise en œuvre de la technique de dénombrement, la pascaline est le seul outil faisant apparaître une rupture lors du rajout d'une unité entre 9 et 10. La pascaline sait compter en paquets de 10 et éléments tout seuls mais elle ne fait pas matériellement de paquets de 10. C'est donc l'usage des autres techniques de dénombrement qui permet de reconnaître dans le couple de chiffres affiché sur la pascaline, l'écriture chiffrée du nombre d'éléments et le nom de ce nombre.

Pour cela, l'enseignant introduit une nouvelle technique pour matérialiser les paquets de 10 :

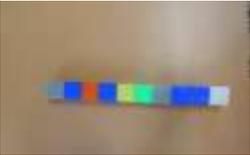
- a) entourer dix bâtonnets avec un élastique 
- b) ou entourer dix croix avec un trait 
- c) ou repérer et entourer avec un trait les dix premières cases de la bande numérique 
- d) ou emboîter 10 cubes ensemble 
- e) pas de technique spéciale pour la pascaline 

Figure 9. Représentation de la dizaine avec différents matériels de numération (de a à e).

Cette nouvelle technique, qui consiste à réaliser des groupements par 10 dans une collection, n'est pas nécessaire pour résoudre le problème posé puisque la collection à dénombrer est ici petite. Cependant elle est justifiée par sa cohérence avec le fonctionnement de la pascaline qui, de par sa nature, donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments d'une collection « en vrac » en paquets de 10 et en « tout seuls ». On pourra ainsi compter en dizaines et en unités. La grandeur quantité sera mesurée par un nombre entier indiquant le nombre de dizaines et le nombre d'unités. Il s'agit ici d'une modélisation du monde sensible dans la théorie des nombres explicitée par le schéma



Figure 10. Correspondance entre les collections de 10 éléments, la grandeur quantité X et la mesure pour le nombre 10.

(Soury-Lavergne, 2017, p.7)

### **3.1.3 Théorie**

Elle permet à son tour de justifier, de produire et de rendre compréhensible la technologie pour les personnes responsables des contenus d'enseignement mais pas pour les élèves. Dans le domaine numérique, il s'agit de la théorie des nombres elle-même incluse dans la théorie des ensembles. Dans la théorie des nombres, on sait notamment que tous les ensembles pouvant être mis en correspondance terme à terme dans le monde sensible ont la même quantité d'éléments. Tous ces ensembles ont donc la même caractéristique commune : ils ont le même cardinal.

## **3.2 Description de l'organisation didactique permettant de donner des éléments de réponse à la question : *Comment s'y est pris le professeur pour enseigner la notion visée***

La TAD fournit des outils pour décrire la démarche mise en place pour conduire l'étude. Dans l'ensemble des éléments mis en œuvre par l'enseignant, Chevallard propose de repérer six moments, dits moments didactiques qui constitueront « l'organisation didactique ».

### **3.2.1 Le moment de la première rencontre avec le type de tâche problématique**

Dans la séance décrite précédemment, il s'agit d'une mise en situation permettant aux élèves d'entrer dans la tâche à accomplir.

*Le professeur met des cubes dans une boîte en les faisant tomber les uns après les autres. [...]*

*Les élèves vont accompagner ses actions c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'il mettra un cube dans la boîte, ils entendront un bruit et ils agiront avec leur outil respectif.*

C'est à ce moment que les élèves rencontrent la tâche, à savoir, dénombrer une collection inaccessible dont les éléments ne sont connus que par le bruit que fait chacun d'entre eux en tombant dans une boîte métallique opaque.

### **3.2.2 Le moment de l'exploration du type de tâche et de l'élaboration d'une ou des technique(s) associée(s)**

Dès le début de la séance, les techniques à utiliser sont décrites par le professeur qui décrit l'action à réaliser avec chaque outil. Il s'agit là d'un **moment d'élaboration des techniques et d'élaboration d'un discours technologique** qui n'est pas à la charge des élèves. Dans son discours, le professeur a aussi introduit des éléments permettant de justifier ces techniques. Ce moment apparaît au cours des différentes phases.

#### **Phase 1 :**

- Un élève par groupe est sollicité pour expliquer la technique ayant permis, avec son outil, de réaliser la tâche demandée, la technique utilisée pour faire « et encore un ».
- Puis, le professeur questionne les élèves pour savoir « *À quoi correspond ce nombre ?* » « *C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte du professeur.* » « *Comment le vérifier ?* » « *Pourquoi la pascaline donne-t-elle le nombre de cubes présents dans la boîte ?* »
- Une mise en correspondance terme à terme de la collection de cubes avec les différentes collections intermédiaires créées permet de justifier la pertinence des techniques utilisées pour accomplir la tâche demandée.

#### **Phases 2 et 3 :**

- Le professeur interroge d'abord les groupes qui n'ont pas la pascaline : « *Combien de cubes y a-t-il dans la boîte ?* »
- Ensuite, il demande au groupe ayant la pascaline « *Où lisez-vous 10 ?* » Il propose à un élève de venir le montrer à toute la classe.
- La question suivante est ensuite posée au groupe pascaline : « *Comment ça s'est passé pour passer de 9 à 10 ? Pour faire 9 et encore 1 ?* »

On peut supposer qu'ils aient ressenti une force en tournant la roue jaune de droite dans le sens des aiguilles d'une montre et qu'ils aient vu en même temps la roue jaune du milieu tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.

- À partir de là, tous les élèves prennent une pascaline, la mettent sur « 9 » et effectuent le rajout d'une unité pour observer ce qui a été décrit ci-dessus. Leur préciser que la roue jaune du milieu indique *1 paquet de 10*. Puis faire le retrait d'une unité pour voir que la roue jaune du milieu tourne dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre.

- Ensuite, on explore d'autres tâches analogues. Maintenant, chaque groupe garde son outil respectif. Le professeur met dans la boîte **où il y a déjà 10 cubes**, 1 cube supplémentaire (lors d'une prochaine séance, on pourra recommencer avec des ajouts supérieurs à 1 unité).

- *Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ? 11*

- *Où le voyez-vous écrit ? sur la pascaline*

- *Que s'est-il passé quand vous avez fait l'ajout « et encore 1 » ? la roue du milieu n'a pas tourné. Seule la roue à droite a tourné d'un de plus dans le sens de aiguilles d'une montre.*

- *Que représente ce nombre affiché sur la pascaline ? 1 paquet de 10 cubes et 1 cube tout seul.*

- Vérification avec le groupe des bâtonnets : *On peut faire un paquet de 10 bâtonnets avec l'élastique et encore 1 bâtonnet tout seul. On a en tout 11 bâtonnets.*

- Vérification avec le groupe des croix : *On peut faire 1 paquet de 10 croix (entourer 10 croix) et encore 1 croix toute seule. On a en tout 11 croix.*

- Vérification avec le groupe de la bande numérique : *On est sur la case « 10 » et encore 1 case on arrive sur la case « 11 ».*

Le dénombrement sur la bande numérique permet de trouver le nom de ce nombre tout comme le dénombrement des bâtonnets et celui des croix.

### **3.2.3 Le moment de la constitution de l'environnement technologique-théorique**

Des **éléments technologiques** sont précisés par le professeur au moment de la description de la technique utilisée pour chaque outil. Ces éléments permettent de mettre en évidence l'adéquation de la technique avec la tâche : *« C'est quoi ce nombre ? C'est le nombre de cubes tombés dans la boîte du professeur. En êtes-vous sûrs ? Comment le vérifier ? En comparant les quantités d'éléments des différentes collections intermédiaires constituées avec la collection inaccessible de cubes tombés dans la boîte du professeur. »*

C'est la correspondance terme à terme entre les différentes collections en jeu qui permettra de justifier, de contrôler et de comprendre la pertinence de la technique mise en œuvre avec les différents matériels pour accomplir la tâche en question, à savoir dénombrer la collection inaccessible de cubes.

### **3.2.4 Le moment du travail de la ou des technique(s)**

Suite à cette séance, dans le cadre de la progression de Cap Maths, des tâches du même type que celle décrite ici permettront de travailler la technique avec l'outil pascaline. Il s'agira de faire percevoir aux élèves le mouvement de la roue jaune du milieu dans le sens des aiguilles d'une montre pour passer d'une dizaine à une dizaine supérieure, d'un paquet de 10 à un autre paquet de 10. Le lien sera fait avec les autres collections intermédiaires créées afin de comprendre ce que représente chacun des chiffres de l'écriture du nombre affiché sur la pascaline.

### **3.2.5 Le moment de l'institutionnalisation**

C'est un moment où l'on précise ce qui est à retenir : la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments d'une collection. Elle permet en effet de dénombrer une collection en affichant sous le repère triangulaire de la roue jaune du milieu *le nombre de paquets de 10 cubes* et sous celui de la roue jaune de droite *le nombre de cubes tout seuls* dans la collection.

La pascaline apparaît donc comme un outil de dénombrement par paquets de 10 et éléments tout seuls.

Ce nombre affiché sur la pascaline se retrouve affiché en chiffres sur la bande numérique et il est nommé par décompte des bâtonnets ou des croix.

### **3.2.6 Le moment d'évaluation**

C'est un moment où l'on vérifie que chaque élève, face à une tâche du type de celles entraînées précédemment, utilise correctement la technique institutionnalisée pour l'accomplir et éventuellement justifie son utilisation. Il est essentiel de prévoir des séances d'entraînement à la technique objet d'apprentissage afin de pointer d'éventuelles difficultés dans son utilisation et/ou dans sa justification.

Une évaluation individuelle a eu lieu à l'occasion d'une séance qui a suivi. Chaque élève a eu à donner la quantité d'éléments d'une collection de cubes inaccessible de plus de 10 éléments, en paquets de 10 (en dizaines) et cubes tout seuls (en unités).

Par la suite, des séances ont permis de travailler le type de tâche voisin. Partant d'un nombre mesurant la quantité d'éléments d'une collection, savoir combien cette collection contient de paquets de 10 et combien d'éléments tout seuls restent. Par exemple, j'ai 16 jetons que je veux ranger sur des cartes à 10 cases, combien je remplis de cartes et combien me reste-t-il de jetons ?

Le travail fait au cours de cette séance a servi alors d'appui technologique pour justifier la technique à élaborer : dans 16 le chiffre de gauche indique le nombre de paquets de 10, celui de droite le nombre d'éléments tout seuls.

**Conclusion partielle de la partie 3** : Dans la séance conduite au CP, la tâche à accomplir consiste à dénombrer une collection de cubes qui n'est accessible que par une collection intermédiaire, équipotente et éphémère à savoir la collection de « sons » que font les cubes en tombant dans la boîte. C'est une tâche de dénombrement d'une collection éphémère de sons qui, une fois réalisée, est inaccessible.

La pascaline intervient donc ici comme un compteur qui affiche le nombre d'objets de la collection dénombrée et garde en mémoire le cardinal de la collection de sons émis. Pour valider le dénombrement, cette collection de sons est mise en correspondance terme à terme avec des collections intermédiaires visibles et pérennes (celle des cubes, celle des bâtonnets et celle des croix) et avec des collections intermédiaires invisibles et éphémères (celle des cases et celle des clics). Cette mise en correspondance terme à terme entre les différentes collections est une technique explicitée et justifiée dans la théorie des nombres. En effet, tous les ensembles pouvant être mis en correspondance terme à terme dans le monde sensible ont le même cardinal. Ce discours sur la technique est donné par le professeur lors des phases de mise en commun : « il y a la même quantité de... ».

La pascaline dénombre et transforme la collection éphémère et inaccessible de clics en l'affichage du nombre. C'est aussi ce qui se passe avec la technique utilisant la bande numérique. Ce n'est pas le cas pour les croix dessinées sur l'ardoise et bâtonnets de glace qui matérialisent des collections d'objets équipotentes.

On pourra alors lire sur la pascaline le nombre entier affiché, mesure de la grandeur de la collection en jeu, sans forcément comprendre ce que représente ce nombre.

Dans le cadre de l'institutionnalisation, il est expliqué que la *pascaline compte et « écrit » en paquets de dix et éléments tout seuls*. Elle apparaît donc comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec une nouvelle unité qui est le paquet de dix.

La pascaline montre graphiquement et d'un point de vue moteur le passage à la dizaine supérieure. Elle conduit donc à s'interroger sur ce que représente chaque chiffre de l'écriture d'un nombre mais elle ne fait pas apparaître matériellement les paquets de 10.

Il est donc nécessaire d'expliquer ce qui se passe. Cette explication est donnée en référence aux autres techniques de dénombrement utilisées simultanément par d'autres élèves permettant de construire des collections intermédiaires.

Alors qu'avec la pascaline le passage à la dizaine supérieure est automatique, avec les autres outils utilisés dans la séance au CP, il n'y a pas de différence entre l'ajout d'une unité à 8 et l'ajout d'une unité à 9. Aussi, l'enseignant introduit une nouvelle technique pour matérialiser le paquet de 10 : mettre les bâtonnets de glace en paquet de 10 avec un élastique, entourer les croix par 10 avec le feutre d'ardoise, entourer les 10 premières cases parcourues de la bande numérique.

(Figure 9, p.36)

La mise en correspondance terme à terme des éléments de la collection inaccessible de cubes en vrac et des clics successifs sur la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de cette collection en *nombre de paquets de 10 (dizaines) et nombre d'éléments tout seuls (unités)*.

(Figure 4, p.26 - Figure 7, p. 29 - Figure 8, p.31)

Au CP, le champ numérique sur lequel les élèves travaillent s'étend jusqu'à 99. De fait, il faudra attendre le CE1 pour évaluer si oui ou non la connaissance de notre système de numération est en construction chez les élèves. La quatrième partie de ce mémoire propose donc une séance en numération qui pourrait être menée au CE1 pour comprendre les aspects de ce système.

## 4 Quel est le rôle joué par la pascaline dans l'apprentissage du principe de décimalité de notre numération au CE1

La séance présentée et analysée précédemment a pour objectif de construire l'aspect cardinal du nombre à savoir « le nombre comme mémoire d'une quantité, commun à plusieurs collections ».

Le savoir visé est donc l'écriture décimale des nombres mesurant une collection de plus de 9 éléments et la correspondance entre un groupement par 10 des éléments de la collection avec l'écriture du chiffre « 1 » au rang des dizaines.

Comme nous l'avons vu, la pascaline dénombre et génère l'écriture chiffrée (le nom) du cardinal de cette collection. Elle compte et « écrit » en paquets de dix et éléments tout seuls. Elle apparaît donc comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec une nouvelle unité pour dénombrer : « la dizaine ».

Le nombre affiché sur la pascaline respecte la « *concaténation* » (Serfati, 2005), (Tempier, 2010, p. 62) de chiffres dans l'écriture d'un nombre. Cette juxtaposition et cet enchaînement des chiffres dans un ordre donné, spécificité de notre système de numération, cache deux choses :

- d'une part, le fait que ces chiffres n'ont pas tous la même valeur (aspect positionnel : la valeur des chiffres dépend de leur position dans le nombre)

- et, d'autre part, les relations de 10 entre les unités de différents rangs (principe de décimalité : 10 unités d'un certain rang = 1 unité du rang supérieur).

En effet, quand on regarde juste l'écriture chiffrée d'un nombre on ne voit pas apparaître cette notion de groupements successifs par 10.

De fait, les différentes unités de numération (U.N.) et les relations entre elles restent invisibles.

## **4.1 Position et décimalité : deux aspects de notre numération nécessaires pour interpréter l'écriture chiffrée d'un nombre**

L'aspect positionnel et l'aspect décimal sont deux savoirs liés à la numération. Ils sont désignés explicitement dans les nouveaux programmes de 2015, mis en place en 2016.

*« - Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres).*

*- Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).»*

Contrairement aux programmes précédents, le principe de décimalité est ici clairement identifié en tant que savoir à enseigner. Les U.N. apparaissent au côté des unités simples. Le fait de mixer l'écriture chiffrée et l'écriture en U.N. permet d'explicitier ce principe.

De fait, les nouveaux programmes incitent à *« Utiliser diverses représentations des nombres [...] »,* dont les écritures en U.N. et à *« Utiliser diverses stratégies de dénombrement : décompositions/recompositions additives ou multiplicatives [...] »*

Tempier insiste sur le fait que *« l'apprentissage de la numération pour les élèves c'est comprendre ce que cache cette écriture en chiffres. »* (Tempier, 2010, p. 62) Il consacre l'un de ses articles à deux types de tâches « composer/décomposer » qui sont un *« révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. »* (Tempier, 2016)

Composer consiste à passer de l'écriture en U.N. à l'écriture chiffrée. L'inverse consiste à décomposer. Dans les deux cas, il s'agit de convertir c'est-à-dire de changer d'unités.

La composition et la décomposition apparaissent alors comme deux types de tâches propices pour mobiliser une réelle compréhension de ces deux savoirs. Cependant, pour se faire, il est important d'utiliser les deux variables suivantes : l'ordre de présentation des unités et le nombre d'unités de chaque rang.

Comme nous l'avons vu lors de l'analyse de la séance conduite au CP, la pascaline montre graphiquement, d'un point de vue moteur et auditif le passage à la dizaine supérieure, passage qu'elle prend en charge contrairement au compteur papier. Cependant, cet outil ne fait pas apparaître matériellement les paquets des différents ordres.

**La pascaline ne peut donc pas conduire à elle seule à s'interroger sur ce que représente chacun des chiffres de l'écriture d'un nombre. C'est la situation mise en place qui conduit à commencer à s'interroger sur ce point.**

Comprendre ce que représente chacun des chiffres de l'écriture d'un nombre nécessite de travailler sur un champ numérique bien plus large que celui « utilisé » au CP. Le fait de travailler sur des nombres supérieurs à 99 permettra de faire apparaître différents groupements à l'occasion, par exemple, d'activités de dénombrement de collections. Il sera alors possible de travailler avec les élèves sur ce principe de décimalité.

## **4.2 Introduction des Unités de Numération (U.N.)**

Les U.N. peuvent être un système intermédiaire de désignation des nombres entre l'écriture chiffrée « 100 » et le nom du nombre « cent ». Comme le précise Chambris, « *L'un des avantages de ce système est qu'il se dit presque comme il s'écrit.* » (Chambris, 2014, p. 30)

En effet, « 1 centaine » s'écrit « 100 » en écriture chiffrée et se dit « cent ».

L'introduction des U.N. dans les différents types de tâches permet de mettre en évidence et de travailler cet aspect décimal de la numération, peu enseigné avant les programmes de 2015.

Chambris note l'importance de l'enseignement des relations de 10 entre les unités des différents rangs dans l'écriture d'un nombre entier. Elle propose donc de développer une connaissance de la numération décimale de position des entiers en enseignant les relations de 10 entre les U.N. des différents rangs, connaissance qui facilitera notamment ensuite le travail sur la numération positionnelle des décimaux.

À propos des CP, elle explique qu'il existe « *un problème d'ordre cognitif à cet âge concernant la dizaine.* » (Chambris, 2014, p. 27) Les élèves de CP sont-ils capables d'accéder au concept de « dizaine » en tant qu'« unité pour compter » ? Quand ils travaillent sur la grandeur quantité, sont-ils capables de voir à la fois « dix unités » et « une dizaine » dans une même collection d'objets ? Sont-ils capables de compter « un » (dizaine) quand il y a « dix » ?

Elle précise que les chercheurs ne semblent pas être d'accord. Par contre, il semble clair que pour parvenir à comprendre ce qu'est « la dizaine » en tant qu'« unité pour dénombrer », il est nécessaire d'avoir compris ce qu'est le nombre DIX.

Chambris explique ce que signifie « *connaître un nombre* » à savoir connaître « *la dizaine* » comme « *nombre* » c'est-à-dire « *une façon de dire DIX* ».

Par exemple, connaître et comprendre le nombre DIX c'est connaître ses décompositions (additives voire multiplicatives), connaître ses compléments, connaître les nombres qu'il compose ( $14=10+4$ ), l'utiliser pour calculer comme par exemple dans les arbres à calcul, considérer ses dix doigts et « *faire des nombres avec* », connaître les décompositions avec dix des nombres entre 10 et 20 à savoir connaître les tables d'addition. (Chambris, 2014, p.27)

Cependant, il ne suffit pas de connaître les décompositions du style  $14=10+4$  pour comprendre ce qu'est « la dizaine » en tant « qu'unité pour compter ».

Pour comprendre ce concept, il faut être amené à compter plusieurs unités à partir de types de tâches « dénombrer de grandes collections » ou « fabriquer de grandes collections » à l'aide de la technique du comptage de 1 en 1, de 10 en 10... mais aussi de 1 dizaine en 1 dizaine... Il faut que les élèves puissent s'exprimer en termes d'U.N. et non en termes de paquets (en référence au matériel) afin de pouvoir accéder aux U.N. et interpréter les relations qui les unissent dans l'écriture d'un nombre. (Chambris, 2014, p. 28)

Chambris précise que, d'un point de vue cognitif, c'est au CE1 que les élèves devraient pouvoir accéder à la dizaine, à la centaine comme « unités de compte ».

Pouvoir dire « il y a 4C soit 400U » aide à comprendre ce qu'est une unité pour compter.

Par contre, dire « il y a 4 paquets de 100 » n'aide pas à comprendre dans la mesure où le nombre de paquet n'est pas le nombre d'unités.

En classe, pour donner un sens aux chiffres dans l'écriture d'un nombre, on se réfère très souvent à du matériel. (Scéren CNDP-CRDP, 2002, pp. 41-42)

Il peut être de deux types :

- dans un premier temps, du matériel de « type groupement » utilisé dans les activités de dénombrement de collections. Il peut s'agir de cubes, de bâtonnets de glace... L'une des procédures possibles pour fournir le nombre d'éléments de cette collection étant d'utiliser le comptage par paquets de dix après les avoir groupés. On parle donc en nombre de paquets de cubes ou de paquets de bâtonnets de glace...

- dans un deuxième temps, du matériel de « type échanges » utilisé dans les activités de recherche de la valeur. Il peut s'agir de cartes sur lesquelles sont indiquées des valeurs (1 ; 10 ; 100..) ou de la monnaie. Les élèves sont dans ce cas confrontés à la distinction entre quantité et valeur.

On l'a vu plus haut, le nombre de paquets, la quantité de paquets ne suffit pas à constituer le nombre, c'est ce qu'il y a dans le paquet qui doit constituer le nombre, la valeur.

Prenons un exemple concernant le nombre de paquets de 10 bâtonnets de glace : dire « il y a 5 paquets de 10 bâtonnets de glace » ne suffit pas à constituer le nombre de bâtonnets de glace. Ce nombre est constitué par la quantité de bâtonnets de glace qu'il y a à l'intérieur des paquets soit ici 50 bâtonnets de glace.

Chambris indique que « *ce ne sont pas les échanges qu'il faut enseigner aux élèves mais les conversions entre U.N.* » Elle explicite cela en disant qu'il faut leur apprendre à « *réduire les nombres d'unités de chaque ordre en convertissant en unités les plus grosses possibles.* » (Chambris, 2014, p.17)

Pour construire la quantité, on utilise les groupements par 10. Il s'agit du groupement le plus efficace pour écrire le nombre représentant la quantité de la collection en jeu.

Dans son cours sur la numération dans le cadre du Master MEEF 1<sup>er</sup> degré, Philippe Dauriac fait référence au propos de Margolinas pour expliquer ce que signifie « *grouper en base 10* ». Il indique que ce n'est pas seulement grouper par 10. En effet, quand on groupe en base 10, il s'agit de respecter des règles : si j'ai 10 groupements de 10 unités d'un certain rang, je ne peux pas les laisser ainsi, je suis obligé de les grouper par 10. En fait, grouper en base 10 signifie que dès qu'on a 10 « quelque chose », on a un nouveau groupement.

Prenons l'exemple d'une collection de cubes à dénombrer : si j'ai 10 cubes, je dois les grouper en 1 barre de 10 cubes ; si j'ai 10 barres de 10 cubes je dois les grouper en 1 plaque de 10 barres ; si j'ai 10 plaques de 10 barres, je dois les grouper en 1 cube de 10 plaques...On fait des groupements réitérés.

C'est la « *récurtivité de ces groupements* » (Tempier, 2010, p. 62) qui va permettre de construire la grandeur quantité. C'est cette réitération du groupement qui va amener les élèves à comprendre la numération. Quand on groupe par 10, on obtient une relation directe entre quantité et écriture. En effet, si j'ai fait 7 paquets de 10 bâtonnets de glace et qu'il en reste 1 tout seul cela s'écrit 71.

Toujours en référence au propos de Margolinas, lors de son cours de mathématiques, Dauriac précise que la numération de position est basée sur la phrase « *le nombre de places minimum dans un nombre est déterminé par l'ordre du plus grand groupement.* »

Or au CP, on travaille sur les nombres jusqu'à 99. De fait, on n'a qu'un seul groupement de base 10 qui est « la dizaine ». Il est donc difficile de comprendre l'expression « plus grand groupement » alors qu'on n'en a qu'un seul.

Dans le nombre « 27 », il n'y a qu'un groupement de base 10 « la dizaine » donc il y a « 2 positions, 2 places » :

- la place d'origine (celle des unités), existant déjà au CP: ici « 7 »

- le 1<sup>er</sup> groupement celui d'ordre « 1 » (les dizaines), existant déjà au CP : ici « 2 »

En reprenant ce que dit Margolinas, Dauriac stipule que « *dans la mesure où on ne travaille qu'avec un seul groupement de base 10, il n'est pas possible de penser que les élèves aient compris la numération de position en sortant du CP.* »

Au CE1, le champ numérique sur lequel on travaille s'étend jusqu'à 999 voire « éventuellement » jusqu'à 1000. On va donc voir apparaître un 2<sup>e</sup> groupement, celui d'ordre « 2 » c'est à dire celui des centaines. C'est à ce moment là qu'on pourra évaluer si oui ou non le principe de la numération de position est en construction chez les élèves.

Dans le nombre « 143 », il y a quatre groupements par 10 et un groupement par 100. Ici, « le plus grand groupement est par 100 ». De fait, la mesure de cette quantité s'écrira avec 3 chiffres :

- la place d'origine (celle des unités), existant déjà en CP: ici « 3 »

- le 1<sup>er</sup> groupement celui d'ordre « 1 » (les dizaines), existant déjà au CP: ici « 4 »

- le 2<sup>e</sup> groupement celui d'ordre « 2 » (les centaines), nouveauté du CE1: ici « 1 »

C'est donc à partir du CE1, et ce jusqu'au cycle 3, qu'on pourra évaluer si oui ou non le principe de la numération de position est en construction. L'apparition d'un groupement de 2<sup>e</sup> ordre au CE1 (la centaine), d'un groupement de 3<sup>e</sup> ordre au CE2 (le millier)... permettra de mettre en évidence de façon plus explicite le principe de décimalité, à savoir la relation de 10 entre les unités des différents ordres.

Ce sont ces considérations qui me conduisent à présent à envisager un dispositif au CE1 incluant l'usage de la pascaline comme outil de dénombrement de collections de plus de 99 éléments.

### **4.3 Intervention de la pascaline dans la connaissance du système décimal de position au CE1**

Afin de mettre en évidence ce que l'on souhaite enseigner, la séance ci-dessous va être décrite en termes de tâche, de technique, de technologie et de théorie. (Chevallard, 1999)

#### **4.3.1 Objectifs de la séance**

- Poursuivre la construction de l'aspect cardinal du nombre : le nombre mémoire d'une quantité, commun à plusieurs collections.
- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer.
- Utiliser diverses stratégies de dénombrement : décompositions/recompositions additives ; utilisation d'unités intermédiaires (dizaines, centaines) ici en relation avec des groupements.
- Mixer les unités simples et les unités de numération pour travailler le principe de décimalité.
- Prendre conscience de l'importance du nombre 100 pour représenter ici les nombres jusqu'à 999.

#### **4.3.2 Organisation matérielle**

##### **4.3.2.1 Travail par groupe (de 2 à 4 élèves)**

Chaque groupe aura l'une des deux collections à dénombrer (bâtonnets de glace ou cubes) et une pascaline. La taille des groupes variera en fonction du matériel à dénombrer disponible dans la classe.

### 4.3.2.2 Matériel

Une collection à dénombrer (soit des bâtonnets de glace, soit des cubes). Celle-ci sera semi-groupée en paquets de 100 (dans des pochettes plastiques transparentes), en paquets de 10 et en éléments tout seuls. La quantité d'objets sera comprise entre 100 et 999.

Proposer des collections semi-groupées a pour fonction d'inciter les élèves à dépasser le comptage en unités simples. En questionnant les élèves sur le type de tâche « nombre de... », on les amènera à travailler le principe de décimalité.

L'enseignant aura fait en sorte que toutes les collections aient la même quantité d'objets afin de permettre la mise en place d'une correspondance terme à terme entre les éléments des différentes collections au moment de la mise en commun. Pour cette séance, on pourra par exemple proposer une collection de 457 objets pour chaque groupe.

Il serait intéressant que, pour chaque groupe, le professeur prévoit un groupement différent de la collection à dénombrer. Cela permettrait d'enrichir les échanges au moment de la mise en commun où chaque groupe serait invité à décrire sa technique. Par exemple :

Pour le groupe 1 : 2 paquets de 100, 20 paquets de 10 et 57 éléments tout seuls.

Pour le groupe 2 : 3 paquets de 100, 15 paquets de 10 et 7 éléments tout seuls... et ainsi de suite pour les autres groupes.

Pour Chambris, il est important de varier le matériel proposé aux élèves. Elle explique :

*« Si des grandes collections sont données à dénombrer aux élèves, il semble nécessaire de veiller à proposer au moins deux matériels différents, assez tôt, de façon à ce que le lexique introduit pour décrire les manipulations avec l'un ne soit interprété comme spécifique du matériel. Il est nécessaire que les élèves apprennent à utiliser les mêmes mots (U.N.) dans des contextes différents, à savoir avec des matériels différents. » (Chambris, 2014, p.30)*

### 4.3.2.3 À propos de la consigne donnée aux élèves

S'ils ont eu l'occasion de travailler avec la pascaline au CP, face au matériel qui va leur être proposé, ils devraient être capables d'anticiper ce que l'on attend d'eux. Il convient donc, dans un premier temps, de leur donner la parole afin qu'ils puissent formuler eux-mêmes la consigne.

Ensuite, le professeur reformulera la consigne pour tous, avant le début du travail de groupe :

*« Vous allez travailler par groupe soit avec une collection de cubes, soit avec une collection de bâtonnets de glace. Vous allez devoir dire combien il y a d'objets dans votre collection. Vous afficherez ce nombre sur la pascaline.*

*Lors de la mise en commun, vous devrez expliquer aux autres groupes comment vous avez procédé pour trouver la réponse et expliquer ce que représente le nombre qui sera affiché sur votre pascaline.»*

## 4.3.3 Organisation mathématique

### 4.3.3.1 Tâche

Dénombrer une collection semi-groupée de plus de 99 éléments et produire une écriture en chiffres de la quantité : Combien y a-t-il d'objets dans cette collection ?

### 4.3.3.2 Techniques envisagées

- Soit utilisation d'un comptage oral de cent en cent, de dix en dix et de un en un pour trouver le nombre « oralement » puis l'écrire en chiffres avec la pascaline.
- Soit association de chaque groupement à différentes unités (c'est à dire associer chaque élément isolé à 1u ; chaque paquet de 10 à 1d ; chaque paquet de 100 à 1c...).

Dans notre exemple, modéliser 4C5D7U, puis composer  $4C5D7U = 457$  Ici, on associe directement le nombre d'unités de chaque ordre à sa position dans l'écriture en chiffres.

### 4.3.3.3 Technologie

Les techniques envisagées ci-dessus n'ont pas la même « *valence épistémique* », elles n'offrent pas le même potentiel « *pour comprendre des objets mathématiques qu'elles engagent directement ou indirectement [...].* » (Artigue, 2004, p.39), (Tempier, 2016, p.70)

Ici, il s'agit de comprendre le fonctionnement de notre système de numération c'est-à-dire « *comprendre ce que cache l'écriture en chiffres des nombres.* » (Tempier, 2010, p. 62)

Voici donc les savoirs permettant d'expliquer et de justifier ces techniques.

*La 1<sup>ère</sup> technique* repose sur la connaissance de la suite orale des nombres de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100 ainsi que sur la connaissance de la relation entre la numération écrite et la numération parlée.

« cent » c'est 1 centaine donc 1 est écrit au 3<sup>e</sup> rang en partant de la droite... : ici, c'est l'aspect position de la numération qui est mis en jeu. Compter oralement de 10 en 10 (dix, vingt, trente....) ce n'est pas compter des dizaines (1d, 2d, 3d...). De fait, la relation entre les unités des différents rangs n'est pas explicite.

En effet, en utilisant la comptine orale, les élèves ne passent pas par l'interprétation des chiffres dans l'écriture d'un nombre. Chambris explique :

*« Réciter la comptine de dix en dix (dix, vingt, trente...), ce n'est pas compter des dizaines (une dizaine, deux dizaines, trois dizaines...) L'égalité dix dizaines = une centaine n'a pas d'équivalent en numération orale : le nombre qui suit quatre-vingt-dix quand on compte par dix est cent. Avec les comptines et les noms des nombres, les élèves raisonnent en unités simples. Or il est nécessaire de penser en unités de numération pour raisonner sur les chiffres d'un nombre [...]. »* (Chambris, 2014, p. 14)

On peut donc dire qu'avec cette technique, il n'y a pas d'apprentissage de la relation entre les unités des différents rangs, il n'y a pas de lien fait entre le nombre d'unités d'un rang et l'écriture chiffrée. L'aspect décimal ne peut donc pas être mis en avant car les élèves utilisent la comptine orale et non l'interprétation des chiffres.

Les suites écrites et orales de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100... se construisent ou se reconstruisent en avançant ou en reculant. Ces sauts peuvent être expliqués et justifiés par le nom des U.N. et de leurs correspondances avec les noms des nombres. Par exemple, 120 et encore 10 ça fait 130 car 12d et encore 1d ça fait 13d. (Chambris, 2014, p. 25)

La 2<sup>ème</sup> technique peut être explicitée par les deux aspects de la numération : l'aspect décimal qui justifie le groupement de base 10 et l'aspect position qui justifie l'association unité/position.

La relation de 10 entre les unités des différents ordres ( $10u=1d$  ;  $10d = 1c$ ) est mise en évidence et permet donc de donner du sens à chacun des chiffres de l'écriture du nombre d'objets de la collection dénombrée.

Dans notre exemple, face à cette collection semi-groupée à dénombrer (qui contient 457 éléments), les élèves regroupent par 100, puis par 10. Ils obtiennent 4 paquets de 100 éléments, et encore 5 paquets de 10 éléments et encore 7 tout seuls.

Cette situation devrait conduire les élèves à modéliser le monde sensible dans la théorie des nombres en faisant correspondre à la grandeur quantité sa mesure.

En modélisant  $4C5D7U$ , puis en composant  $4C5D7U = 457$ , on associe directement le nombre d'unités de chaque ordre à sa position dans l'écriture en chiffres.

La pascaline dénombre et génère l'écriture chiffrée (le nom) du cardinal de cette collection. Elle compte et « écrit » en paquets de cent, en paquets de dix et éléments tout seuls. Elle apparaît donc comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec une nouvelle unité pour dénombrer ici au CE1, « la dizaine de dizaines c'est à dire la centaine ».

La pascaline montre graphiquement, d'un point de vue moteur et auditif le passage à la dizaine supérieure, puis à la centaine supérieure (passage qu'elle prend en charge contrairement au compteur papier).

Comme c'est le cas au CP avec le paquet de 10, la pascaline ne fait pas apparaître matériellement le paquet de 100. Elle affiche le nombre « 457 ». Cet affichage des chiffres juxtaposés et enchaînés dans un ordre donné ne permet pas d'interpréter ce que représente ce nombre. Cette interprétation sera possible en référence à la situation de dénombrement et au matériel à dénombrer.

En effet, le travail avec le matériel conduit à exprimer la quantité d'objets de la collection en paquets (de 10 ; de 100). Cependant le nombre de paquets ne permet pas de constituer le nombre. C'est ce qu'il y a dans le paquet qui permet de constituer le nombre. Il faut donc inciter les élèves à parler en U.N .

Pour cela, le questionnement de l'enseignant est très important pour permettre de dépasser le comptage en unités simples, pour aider les élèves à « dire » le nombre autrement qu'en unités simples. La tâche à accomplir ne suffit pas à elle seule pour cela. On part d'une collection semi-groupée organisée en partie en paquets de 10 et/ou de 100. La pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de cette collection en nombre de paquets de 10 (dizaines), en nombre de paquets de 100 (centaines) et nombre d'éléments tout seuls (unités). Elle fait correspondre à la grandeur quantité sa mesure en écriture chiffrée.

Le questionnement de l'enseignant « Quel est le nombre de ... ? » permet de faire correspondre à cette écriture chiffrée l'écriture en unités de numération. Cette dernière permet de mettre en lumière la relation de 10 entre les différents rangs.

Dans notre exemple, interroger les élèves :

- Combien y a-t-il de bâtonnets de glace, de cubes, d'unités simples ?

Quel est le nombre d'unités ? 457

- Combien y a-t-il de dizaines ? Quel est le nombre de dizaines ? 45

- Combien y a-t-il de centaines ? Quel est le nombre de centaines ? 4

Ce questionnement consiste en un « changement d'unités de numération ». Il s'agit de convertir et donc d'utiliser les relations de 10 entre les différents rangs.

La pascaline affiche « 457 » c'est aussi bien « 457 bâtonnets de glace », « 457 cubes » à savoir « 457 unités simples » que « 4 centaines 5 dizaines 7 unités » que « 45 dizaines et 7 unités ».

Au moment de la mise en commun, on amènera les élèves à s'interroger sur ce que représente chacun des chiffres de l'écriture d'un nombre écrit sur la pascaline en référence à la situation mise en place. Dans un premier temps, chaque binôme sera invité à mettre en relation ce qu'affiche la pascaline et le matériel qu'il a sur sa table. Ensuite, cette mise en relation sera faite collectivement au coin regroupement avec la collection groupée par l'un des groupes comme présenté en exemple sur la photo ci-jointe.



Figure 11. Correspondance entre la collection de bâtonnets (groupés en paquets de 100, paquets de 10 et éléments tout seuls), l’affichage par la pascaline de la mesure de la quantité d’éléments de cette collection et différentes écritures de cette quantité.

Cette mise en relation et le questionnement qui est fait autour de cette tâche de dénombrement vont faire que l’on va compter en U.S. (unités simples) ou en U.N. (unités de numération).

La pascaline est un outil de dénombrement. Elle a aussi ici un rôle de validation. Grâce à la manipulation du matériel, les élèves ont pu compter que 10 paquets de 10 ça fait 1 centaine qui sur la pascaline s’écrit 100...

Le savoir visé est bien l’écriture décimale des nombres mesurant une collection de plus de 100 éléments et la correspondance entre un groupement par 10 des éléments de la collection avec l’écriture du chiffre « 1 » au rang des dizaines (roue jaune du milieu) ainsi que la correspondance entre un groupement par 100 des éléments de la collection avec l’écriture du chiffre « 1 » au rang des centaines (roue jaune de gauche).

Comme nous l’avons vu, la pascaline dénombre et génère l’écriture chiffrée (le nom) du cardinal de cette collection. Elle compte et « écrit » en paquets de cent (centaines), en paquets de dix (dizaines) et éléments tout seuls (unités). Elle apparaît donc comme un instrument de mesure de la grandeur d’une collection avec une nouvelle unité pour dénombrer ici au CE1 : le paquet de 100 (la centaine).

Comme lors de l’institutionnalisation au CP, le travail fait au cours de cette séance conduit à préciser que, dans l’écriture d’un nombre à trois chiffres, le chiffre de gauche (celui qui est sous la roue jaune de gauche dans le dénombrement) indique le nombre de paquets de 100, le chiffre du milieu indique le nombre de paquets de 10 et le chiffre de droite (celui qui est sous la roue jaune de droite dans le dénombrement) indique le nombre d’éléments tout seuls.

#### 4.3.3.4 Théorie

Elle permet à son tour de justifier, de produire et de rendre compréhensible la technologie pour les personnes responsables des contenus d'enseignement mais pas pour les élèves. Dans le domaine numérique, il s'agit de la théorie des nombres elle-même incluse dans la théorie des ensembles. Dans la théorie des nombres, on sait notamment que tous les ensembles qui ont le même cardinal sont en correspondance terme à terme. Ils ont donc la même quantité d'éléments.

**Conclusion partielle de la partie 4** : Dans la séance conduite au CE1, la tâche à accomplir consiste à dénombrer une collection semi-groupée de plus de 99 éléments et à produire une écriture en chiffres de la quantité. Dans le cadre de l'institutionnalisation, il est expliqué que la *pascaline compte et « écrit » en paquets de cent, en paquets de dix et éléments tout seuls*. Elle apparaît donc comme un instrument de mesure de la grandeur d'une collection avec une nouvelle unité qui est le paquet de cent. La pascaline montre graphiquement et d'un point de vue moteur le passage à la dizaine supérieure, ainsi que le passage à la centaine supérieure.

Elle conduit donc à s'interroger sur ce que représente chaque chiffre de l'écriture d'un nombre mais elle ne fait pas apparaître matériellement les paquets de 10 et les paquets de 100. Il est donc nécessaire d'expliquer ce qui se passe. Cette explication est donnée en référence au matériel utilisé : la collection de cubes et la collection de bâtonnets de glace.

La mise en correspondance terme à terme des éléments de la collection en jeu et des clics successifs sur la pascaline donne l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de cette collection en *nombre de paquets de 100 (en nombre de centaines), en nombre de paquets de 10 (en nombre de dizaines) et en nombre d'éléments tout seuls (en nombre d'unités)*. En ce sens, c'est le questionnement de l'enseignant en « nombre de centaines, nombre de dizaines et/ou nombre d'unités ... » qui permet de travailler le principe de décimalité.

## Conclusion

**La pascaline, un *autre* outil au service de la compréhension de la numération décimale de position.**

Dans les séances présentées dans ce mémoire, la pascaline est utilisée comme un compteur de collections pour l'introduction de la numération décimale, en particulier l'introduction de deux unités pour compter : la dizaine au CP et la centaine au CE1.

Lors de l'institutionnalisation, il est ainsi mis en évidence que dans l'écriture d'un nombre *le chiffre de gauche* (celui qui est sous la roue jaune de gauche de la pascaline dans le dénombrement) indique *le nombre de paquets de 100*, *le chiffre du milieu* (celui qui est sous la roue jaune du milieu de la pascaline dans le dénombrement) indique *le nombre de paquets de 10* et *le chiffre de droite* (celui qui est sous la roue jaune de droite de la pascaline dans le dénombrement) indique *le nombre d'éléments tout seuls*. On construit ainsi la notion de nombre en tant que mesure de la grandeur d'une collection.

Le savoir visé est en effet l'écriture décimale des nombres mesurant une collection (de plus de 9 éléments au CP et de plus de 99 éléments au CE1) et la correspondance entre un groupement par 10 (au CP) ou un groupement par 100 (au CE1) des éléments de la collection avec l'écriture du chiffre 1 au rang des dizaines (au CP) ou avec l'écriture du chiffre 1 au rang des centaines (au CE1). On introduit donc un nouvel outil pour dénombrer : la dizaine (au CP) ou la centaine (au CE1).

Dans les situations d'apprentissages présentées dans ce mémoire, **c'est parce que la pascaline est utilisée en lien avec d'autres outils qu'il est possible de dire qu'elle est un *autre* outil au service de la compréhension de la numération décimale de position.** En effet, ces situations conduisent à construire plusieurs collections équipotentes. De fait, la technique de la correspondance terme à terme permet de valider le dénombrement, justifiant que toutes ces collections ont bien la même quantité d'éléments. Cette caractéristique commune à ces ensembles s'affiche en nombre sur la pascaline et sur la bande numérique. L'interprétation du sens de cette écriture chiffrée, mesure représentant la grandeur « quantité », se fait en lien avec les autres matériels faisant apparaître le groupement par 10 (au CP) ou le groupement par 100 (au CE1) . Ces situations permettent donc de préparer l'introduction d'une nouvelle unité pour dénombrer : la dizaine (au CP), la centaine (au CE1).

Dans le cadre du groupe MPSA « pascaline », la pascaline a été utilisée au CP dans une progression existante pour l'apprentissage de la numération. Au cycle 3, les enseignants ont choisi de rentrer par l'outil pascaline et par la compréhension de son fonctionnement pour revoir la numération et les opérations. L'apprentissage de la numération a été repris en CM avec les élèves en difficultés avec l'aide de la pascaline. En 6<sup>ème</sup>, cet outil a permis de travailler à nouveau sur les opérations, en particulier sur la soustraction avec retenue.

Avant la fin de l'année civile 2017, l'IREM de Clermont-Ferrand devrait publier une brochure « ressource » à l'attention des professeurs des écoles et du collège présentant les travaux menés autour de cet outil par le groupe MPSA « pascaline » lors de ces trois dernières années. Les collègues y trouveront des séances « clés en main » sur l'apport de la pascaline (physique ou virtuelle) dans l'apprentissage de la numération décimale et du calcul.

## Bibliographie

- CHAMBRIS, C. (2014). *Contribution à propos de la numération décimale aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4*. Conseil Supérieur des Programmes, pp. 1-35.
- CHEVALLARD, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*. Actes de l'UE de La Rochelle, pp. 91-118.
- CHEVALLARD, Y. (1996). *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*. Actes de l'École d'été de didactique des mathématiques, pp. 83-112.
- SOURY-LAVERGNE S. (2016). *La pascaline comme entrée dans une formation sur l'enseignement de la numération et du calcul au CP*. XXXXIIIe colloque de la COPIRELEM Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ? Le Puy-en-Velay, France, pp.1-8.
- TEMPIER F. (2010). *Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2*. Grand N n°86, pp.59-90.
- TEMPIER F. (2016). *Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves*. Grand N n°98, pp.67-90.
- WOZNIAK F. & MARGOLINAS C. (2012). *Le nombre à l'école maternelle - Une approche didactique*. Collection « Le point sur...Pédagogie », De Beck, pp.11-41.

### **Texte des programmes et document d'accompagnement :**

- MEN (2010). *Le nombre au cycle 2*. Collection « Ressources pour faire la classe », CNDP, 2010.
- MEN (2015). *Programmes de l'école primaire : BO spécial n°11 du 26 novembre 2015*.

## Table des figures

|   |           |
|---|-----------|
| <i>Figure 1. La Pascaline de Pascal. ....</i>   | <i>5</i>  |
| <i>Figure 2. La pascaline en plastique diffusée par l'association ARPEME. ....</i>  | <i>5</i>  |
| <i>Figure 3. Outils matériels pour le dénombrement. De haut en bas : une pascaline, une bande numérique, un lot de bâtonnets avec des élastiques et une barquette, une ardoise et un feutre, des cubes et une boîte métallique. ....</i>                                      | <i>22</i> |
| <i>Figure 4. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 9.....</i>   | <i>26</i> |
| <i>Figure 5. Affichage de la pascaline pour le nombre 10. ....</i>  | <i>28</i> |
| <i>Figure 6. Au tableau, image papier en format A3 de la pascaline avec affichage du nombre 10. ....</i>  | <i>28</i> |
| <i>Figure 7. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 10.....</i>  | <i>29</i> |
| <i>Figure 8. Correspondance entre les collections d'objets et l'affichage de la pascaline pour le nombre 11.....</i>  | <i>31</i> |
| <i>Figure 9. Représentation de la dizaine avec différents matériels de numération (de a à e).....</i>   | <i>36</i> |
| <i>Figure 10. Correspondance entre les collections de 10 éléments, la grandeur quantité X et la mesure pour le nombre 10.....</i>   | <i>36</i> |
| <i>Figure 11. Correspondance entre la collection de bâtonnets (groupés en paquets de 100, paquets de 10 et éléments tout seuls), l'affichage par la pascaline de la mesure de la quantité d'éléments de cette collection et différentes écritures de cette quantité. ....</i> | <i>55</i> |