Corrigé du sujet pour le 7 décembre

Première Partie - Matrices symplectiques.

1.a) Chaque transposition de deux colonnes change le signe du déterminant donc $\det(J) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1$ [1] et $\det({}^tMJM) = \det({}^tM)\det(J)\ \det(M) = (\det(\mathrm{M}))^2$ donc $\det(M) = \pm 1$. En particulier, toute matrice symplectique est inversible.

b) L'ensemble des matrices symplectiques n'est pas vide (car contient I_n), est stable par $\times$ (car ${}^t(MN)J(MN) = {}^tN({}^tMJM)N = {}^tNJN = J$) et par invesrion (car si M est symplectique, on a ${}^t(M^{-1})JM^{-1} = {}^t(M^{-1})({}^tMJM)M^{-1} = J$).
L'ensemble des matrices symplectiques est donc un sous-groupe de l'ensemble des matrices inversibles.

c) facile. On se souviendra de $J^2 = -I_n$

d) Si M est symplectique, ${}^tM = JM^{-1}J^{-1}$, donc $MJ\,{}^tM = MJJM^{-1}J^{-1} = -I_nJ^{-1} = J$.

2. On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

a) Un calcul par blocs donne ${}^tMJM = \begin{pmatrix} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{pmatrix}$. Donc M est symplectique ssi

$$\begin{cases} {}^tCA - {}^tAC = {}^tDB - {}^tBD = 0 \\ {}^tAD - {}^tCB = {}^tDA - {}^tBC = I_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques,} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \end{cases}$$

b) On suppose D inversible. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est égale à M ssi $Q = BD^{-1}$.

On suppose de plus que M est symplectique.
Le calcul par blocs d'un déterminant donne $\det(M) = \det(A - QC)\ \det(D) = \det(A - BD^{-1}C)\ \det(D)$
Comme ${}^tBD = {}^tDB$ (voir 2.a)), on a $BD^{-1} = ({}^tD)^{-1}{}^tB$
Comme ${}^tAD - {}^tCB = I_m$ (voir 2.a)), on a $A - ({}^tD)^{-1}{}^tBC = ({}^tD)^{-1}$
donc $\det(A - BD^{-1}C)\ \det(D) = \det(({}^tD)^{-1})\ \det(D) = 1$

c) $(\underline{D}\vec{v}_1|\underline{D}\vec{v}_2) = s_1(\underline{B}\vec{v}_1|\underline{D}\vec{v}_2) = s_1{}^tV_1{}^tBDV_2$ où V_1, V_2 sont les matrices colonnes de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^m$. De même $(\underline{D}\vec{v}_1|\underline{D}\vec{v}_2) = s_2{}^t({}^tBDV_1)V_2$. Par symétrie de ${}^tBD$ on a ${}^tV_1{}^tBDV_2 = {}^t({}^tBDV_1)V_2$. Donc $(\underline{D}\vec{v}_1|\underline{D}\vec{v}_2) = 0$.

d) (i) Si $\underline{D}\vec{v} = \underline{B}\vec{v} = 0$, alors $\underline{M}(\vec{0}, \vec{v}) = \vec{0}$. Comme M est inversible, on a $\vec{v} = \vec{0}$.

(ii) Si D est inversible, $s = 0$ convient. Sinon, soit $\vec{v}$ un vecteur non nul du noyau de D. D'après ce qui précède, $\underline{B}\vec{v} \neq \vec{0}$.
L'ensemble $\{s \in \mathbb{R}^*; Ker(D - sB) \neq \{\vec{0}\}\}$ a au plus n éléments distincts : sinon il en aurait au moins $n + 1$; à chacun de ces éléments, on peut associer un vecteur $\vec{v}_s$ non nul du noyau de $Ker(D - sB)$, obtenant ainsi d'après la réponse précédente une famille $\{D\vec{v}_s\}$ orthogonale a $n + 1$ éléments non nuls dans un espace de dimension n.
Il existe donc au moins un (et même très beaucoup de) s satisfaisant la demande.

(iii) Un calcul par blocs donne $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - sA & D - sB \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$ est une matrice symplectique. Donc $\begin{pmatrix} A & B \\ C - sA & D - sB \end{pmatrix}$ est symplectique (voir 1.b)) avec $D - sB$ inversible. D'après **b)**, son déterminant vaut 1. Donc $\det(M) = 1$.

1. en fait, il suffit de vérifier que le déterminant de J n'est pas nul pour répondre à cette question

3.

a) Soit λ un complexe non nul.

$(M-\lambda I_n)J = MJ - \lambda J = MJ - \lambda({}^tMJM) = MJ(I-\lambda {}^tM) = XMJ(\frac{1}{\lambda} - {}^tM)$.

En passant aux déterminant, on obtient le résultat voulu.

b) P est un polynôme à coefficients réels, donc si λ_0 est une valeur propre de M, alors $\overline{\lambda_0}$ est aussi valeur propre de M avec la même multiplicité.

Remaquons d'abord que 0 n'est pas racine, car M st inversible.

Supposons $P(X) = (X-\lambda_0)^dQ(X)$ où $Q(\lambda_0) \neq 0$. Alors $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^dQ(\lambda)$ et $P(\lambda) = \lambda^{2m}(\frac{1}{\lambda}-\lambda_0)^dQ(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^{2m-d}(1-\lambda\lambda_0)^dQ(\frac{1}{\lambda})$

Il en résulte que si λ_0 est une valeur propre de M de multiplicité d, alors $\frac{1}{\lambda_0}$ est aussi valeur propre de M de multiplicité $d' \geq d$. En applicant le même raisonnement à $\frac{1}{\lambda_0}$, on obtient $d \geq d'$ et finalement $d = d'$.

Il en est de même pour $\frac{1}{\overline{\lambda_0}}$.

c) Si λ_0 est un réel différent de ± 1, l'ensemble $E(\lambda_0) = \{\lambda_0, \overline{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\overline{\lambda_0}}\}$ a deux éléments.

Si λ_0 est un complexe, l'ensemble $E(\lambda_0)$ a deux ou quatre éléments selon que $|\lambda_0| = 1$ ou pas.

On note E l'ensemble de ces ensembles[2] et $mult(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ.

$\star$ $2m = mult(+1) + mult(-1) + \sum_{I \in E - \{\{+1\},\{-1\}\}} \sum_{\lambda \in I} mult(\lambda)$

Les $\sum_{\lambda \in I} mult(\lambda)$pour $I \in E - \{\{+1\},\{-1\}\}$ sont pairs, donc la somme des ordres de multiplicité de 1 et -1 est paire.

$\star$ $\det(M) = (-1)^{mult(-1)} + \prod_{I \in E - \{\{+1\},\{-1\}\}} \prod_{\lambda \in I} \lambda^{mult(\lambda)}$. Or pour $\lambda_0 \neq -1$, le produit des éléments de chaque $E(\lambda_0)$ vaut 1. Comme $\det(M) = 1$, il en résulte que -1 a un ordre de multiplicité pair, et donc également 1.

d) On suppose dans cette question que $m = 2$.

(1) La matrice diagonale $M = I_4$ est clairement symplectique et admet une seule valeur propre.[3]

(2) La matrice $M = J$, symplectique d'après 1.c), annule le polynôme X^2+1, qui est scindé et a racines simples sur $\mathbf{C}$. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$ avec un spectre contenu dans $\{i, -i\}$.

Comme J est réelle alors i et $-i$ sont valeurs propres, et de même multiplicité (ici 2) (le polynômpe caractéristique a des coefficients réels).

(3) Si M admet une valeur propre double et deux autres simples, alors la valeur propre double est réelle et égale à ± 1. Les deux autres peuvent être deux complexes conjugués de module 1 ou deux réels.

La matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, symplectique d'après **2.a)**, est une solution.

(4) On peut chercher une matrice symplectique sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec ${}^tAD = I_2$.

Le calcul par blocs donne le polynôme caractéristique $P(X) =$det$(A - XI_2)$ det$(D - XI_2)$.

En considérant une matrice D ayant deux valeurs propres complexes conjuguées de module $\neq 1$, on obtient une matrice M ayant quatre valeurs propres complexes différentes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Avec $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, on obtient une matrice M ayant les valeurs propres $2i$, $-2i$, $\frac{i}{2}$ et $-\frac{i}{2}$

e) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, où $B \in \mathcal{M}_m$ est une matrice symétrique.

La matrice M est symplectique d'après **2.a)**. Elle est triangulaire supérieure avec 1 pour unique valeur propre.

Si M était diagonalisable sur $\mathbb{C}$, elle serait semblable à I_{2m}, donc égale à I_{2m}, ce qui est faux dès qu'on choisit $B \neq 0$.

---

2. Attention : pas leur réunion !
3. Les deux seules solutions sont en fait I_n et $-I_n$

Deuxième Partie - Formes symplectiques et endomorphismes symplectiques.

4.a) (i) La bilinéarité de w résulte de la linéarité de η et de la bilinéarité du produit scalaire.
(ii) $\omega(\vec{y},\vec{x}) = (\eta(\vec{y})|\vec{x}) = (\vec{y}|\eta^*(\vec{x})) = -(\vec{y}|\eta(\vec{x})) = -\omega(\vec{x},\vec{y})$.
La condition $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n \omega(\vec{x},\vec{y}) = 0$ équivaut à $\eta(\vec{x}) = 0$. Donci ω est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{Ker}(\eta) = \{0\}$, soit η bijective en dimension finie.

b) $\left\{\begin{array}{ll} E \longrightarrow E^* & \\ \vec{x} \longrightarrow \vec{x}^* & \text{où } \vec{x}^*(\vec{y}) = <\vec{x},\vec{y}> \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
Soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, l'application $\vec{y} \to \omega(\vec{x},\vec{y})$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique élément de $\mathbf{R}^n$, noté $\eta(\vec{x})$ tel que $\omega(\vec{x},\vec{y}) = \eta(\vec{x})^*(\vec{y})$, d'où l'existence d'une application η de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbf{R}^n, \quad \omega(\vec{x},\vec{y}) = (\eta(\vec{x})|\vec{y}).$$

La linéarité de η résulte de la linéarité à gauche de ω.
La définition de l'adjoint η^* et l'antisymétrie de ω donnent

$$\omega(\vec{x},\vec{y}) = (\eta(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|\eta^*(\vec{y})) \quad \text{et} \quad \omega(\vec{y},\vec{x}) = (\eta(\vec{y})|\vec{x}) = (\vec{x}|\eta(\vec{y})).$$

Il en résulte que $\eta^*(\vec{y}) = -\eta(\vec{y})$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, donc η est antisymétrique.
Enfin l'inversibilité de η résulte de la non dégénérescense (voir 4.a)) de ω.

5. $\det(\eta^*) = \det(\eta)$ et $\det(-\eta) = (-1)^n \det(\eta)$ avec $\det(\eta) \neq 0$. Donc n est pair.

6.
a) Immédiat d'après 4.

b) $\omega_0(\vec{e}_k,\vec{e}_l) = (\underline{J}(\vec{e}_k)|\vec{e}_l) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq m \text{ et } l = k+m \\ -1 & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \text{ et } k = l+m \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$

c) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$.
En notant X, Y les matrices colonnes dans $\mathcal{B}$ de $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$, les réels $w_0(x,y)$ et $w_0(\varphi(x),\varphi(y))$ s'identifient respectivement aux matrices ${}^tYJX$ et ${}^t(MY)JMX = {}^tY{}^tMJMX$.
Il en résulte que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad w_0(\varphi(x),\varphi(y)) = w_0(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad {}^tMJM = J,$$

ce qui équivaut à dire que M est une matrice symplectique.
Dans ce cas, on dit que φ est un endomorphisme symplectique.

7.
a) On suppose que le polynome caractéristique de φ est scindé à racines simples de module 1 dans $\mathbb{C}$. φ est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Il existe $P \in GL(n, \mathbb{C})$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$,
avec $|\lambda_i| = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, tels que $M = P\Delta P^{-1}$.
Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$ où $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}X$. On vérifie aisément que $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
On a $\|\varphi(\vec{x})\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|$ où $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}MX$. Or $P^{-1}MX = \Delta P^{-1}X = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$.
Il en résulte que $\|\varphi(\vec{x})\|_1 = \|\vec{x}\|_1$. Ainsi la suite $(\|\varphi^p(\vec{x})\|_1)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
L'équivalence des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|$ assure que la suite $(\|\varphi^p(\vec{x})\|)_{p\in\mathbf{N}}$ est également bornée.

b) Soit φ un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique où $\Omega \in \mathcal{M}_m$.
D'après **2.a)** et **6.c)**, φ est symplectique si et seulement si ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire Ω matrice orthogonale.
Un calcul par blocs donne ${}^t\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\Omega\Omega & 0 \\ 0 & {}^t\Omega\Omega \end{pmatrix} = I_{2m}$. Donc φ est orthogonal donc stable.

c) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2m}$ possédant une valeur propre de module $\neq 1$.
D'après **3.b)**, il admet une valeur propre λ_0 telle que $\mid \lambda_0 \mid > 1$.
$\star$ Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^{2m}\backslash\{0\}$ tel que $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0$. D'où $\|\varphi^p(x_0)\| = |\lambda_0|^p \|x_0\|$, où la suite $(\|\varphi^p(x_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée.
$\star$ Si $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$, alors il existe $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}^{2m}\backslash\{0\}$ tel que $\varphi(z_0) = \lambda_0 z_0$.
Comme la matrice de φ est réelle, le vecteur $x_0 - iy_0$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\lambda}_0$. λ_0 et $\overline{\lambda}_0$ étant différentes, les vecteurs propres $x_0 + iy_0$ et $x_0 - iy_0$ sont donc indépendants, ce qui implique $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^{2m}\backslash\{0\}$.
En distinguant les composantes réelles et imaginaires dans $\varphi(x_0 + iy_0)$ et $\varphi(x_0 - iy_0)$, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \alpha y_0 + \beta x_0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda_0 = \alpha + i\beta.$$

Les calculs donnent $\|\varphi(x_0)\|^2 + \|\varphi(y_0)\|^2 = |\lambda_0|^2 \left(\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2\right)$.
Choisissons un réel k tel que $1 < k < |\lambda_0|$. Alors l'une des inégalités $\|\varphi(x_0)\| \geq k\|x_0\|$ et $\|\varphi(y_0)\| \geq k\|y_0\|$ est vérifiée.
Ainsi l'une des deux suites $(\|\varphi^p(x_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ ou $(\|\varphi^p(y_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. φ n'est donc pas stable.

8. On note $x_1, \ldots, x_{2m}$ les coodonnées de $x \in \mathbf{R}^{2m}$ dans la base canonique. Pour $R > 0$, on considère les ensembles $C_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ et $\Gamma_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,/\, x_1^2 + x_{m+1}^2 \leq R^2\}$.
On note B la boule fermée unité.

a) On suppose $m \geq 2$.
Si $R \geq 1$, l'endomorphisme symplectique φ étudié en **7.b)** vérifie $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{2m}$. Il en résulte que $\varphi(B) \subset C_R$ (et aussi $\varphi(B) \subset \Gamma_R$).
Si $R < 1$, on considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & bI_m \\ cI_m & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, avec $b, c \in \mathbf{R}$.
D'après **2.a)** et **6.c)**, φ est symplectique si et seulement si $-bc\,{}^tI_m I_m = I_m$, c'est-à-dire $bc = -1$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_{2m}) \in \mathbf{R}^{2m}$, le calcul donne $\varphi(x) = (bx_{m+1}, \ldots, bx_{2m}, cx_1, \ldots, cx_m)$.
Il suffit alors de choisir $0 < b \leq R$ (et c tel que $cb = -1$) pour obtenir $\varphi(B) \subset C_R$.

b) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^n$ de matrice M dans la base canonique.
La relation matricielle ${}^tMJM = J$ se traduit par la relation $\varphi^* \circ \underline{J} \circ \varphi = \underline{J}$.
Comme φ est bijective, il existe $x, y \in \mathbf{R}^n$, uniques, tels que $\varphi(x) = e_1$ et $\varphi(y) = e_{m+1}$.
En utilisant $\underline{J}(e_1) = e_{m+1}$ et $\underline{J}(e_{m+1}) = -e_1$, on obtient $\varphi^*(e_{m+1}) = \underline{J}(x)$ et $\varphi^*(e_1) = \underline{J}(-y)$.
Notons $z = \underline{J}(x)$. L'endomorphisme $\underline{J}$ étant orthogonal (car ${}^tJJ = I_{2m}$), on en déduit les égalités

$$\|\varphi^*(e_{m+1})\| = \|z\| \text{ et } \|\varphi^*(e_1)\| = \|y\|.$$

Par ailleurs, en utilisant **6.b)** et la définition de w_0, on obtient

$$(z|y) = w_0(x, y) = w_0(\varphi(x), \varphi(y)) = w_0(e_1, e_{m+1}) = 1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit alors qu'on ne peut pas avoir simultanément $\|\varphi^*(e_1)\| < 1$ et $\|\varphi^*(e_{m+1})\| < 1$.
Supposons que l'on ait $\|\varphi^*(e_1)\| \geq 1$.
La définition de l'adjoint donne $(\varphi^*(e_1)|x) = (e_1|\varphi(x)) = (e_1|e_1) = 1$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que $\|x\| \leq 1$.
Le vecteur normalisé $x' = \frac{x}{\|x\|}$ appartient à la boule unité B. Mais $\varphi(x') = \frac{1}{\|x\|}e_1$ n'appartient pas à Γ_R si $R < 1$.
On aboutit à la même conclusion lorsque $\|\varphi^*(e_{m+1})\| \geq 1$ en calculant $(\varphi^*(e_{m+1})|y)$.
Finalement, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(B) \subset \Gamma_R$.