19 avril 2015

Calculs de probabilités

Modèle mathématique

La situation à modéliser est la suivante : on transmet un message composé de n bits. Pendant la transmission, chaque bit est modifié avec la probabilité $p < 0,5$ (c'est le taux d'erreur du canal de transmission : on a $p \approx$ nombre de bits erronés/nombre de bits transmis).

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les erreurs ont autant de chance de se produire sur les 1 que sur les 0
- les erreurs se produisent de façon indépendante pour chaque bit

Il s'agit d'un schéma de Bernouilli, et la loi de probabilité correspondante est une loi binomiale de paramètres n et p :

- Variable aléatoire X = nombre de bits erronés dans un message reçu
  - ⋆ Les valeurs possibles pour X sont $0, \dots, n$
- Probabilité de recevoir un message avec k bits erronés (pour k compris entre 0 et n) :
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - ⋆ où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sont les coefficients binomiaux

Exemple 1 : le code par répétition

Supposons qu'on utilise le code par répétition avec un canal de transmission dans lequel un bit sur cent est modifié (dans la réalité, ce serait un canal de très mauvaise qualité).

Un bit reçu sur cent est faux $p = 0,01$	Code par répétition $n = 3$

Probabilité de chaque situation

- Probabilité de recevoir un message avec k bits erronés
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = k) = \binom{3}{k} 0,01^k (0,99)^{3-k}$
- Probabilité que le message reçu ne comporte pas d'erreur
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 0) = 0,99^3 \approx 97,030\%$
- Probabilité que le message reçu comporte une erreur
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 1) = 3 \times 0,01 \times 0,99^2 \approx 2,940\%$
- Probabilité que le message reçu comporte deux erreurs
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 2) = \frac{3\times 2}{2} \times 0,01^2 \times 0,99 \approx 0,030\%$
- Probabilité que le message reçu comporte trois erreurs
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 3) \approx 0,0001\%$

Taux de détection des messages erronés

- On calcule le taux de messages erronés détectés
- Probabilité que le message reçu comporte une ou des erreurs
  - ⋆ $1 - \mathcal{P}(X = 0) \approx 2,97010\%$
- Probabilité qu'un message erroné soit détecté
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2) \approx 2,97000\%$
- Taux des messages erronés détectés
  - ⋆ $\frac{\text{Proba erreurs détectées}}{\text{Proba erreurs}} \approx 99,997\%$

Taux de correction exacte des messages erronés

- On calcule le taux de messages reconnus erronés bien corrigés
- Probabilité qu'un message soit erroné et détecté
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2) \approx 2,97\%$
- Probabilité qu'un message soit erroné et bien corrigé
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 1) \approx 2,94\%$
- Taux de messages reconnus erronés bien corrigés
  - ⋆ $\frac{\text{Proba erreurs bien corrigées}}{\text{Proba erreurs détectées}} \approx 99\%$

Exemple 2 : le code de double parité
Supposons qu'on utilise le code de double parité avec un canal de transmission dans lequel un bit sur mille est modifié (dans la réalité, ce serait encore un canal de très mauvaise qualité).

Un bit reçu sur mille est faux	Code de double parité
$p = 0,001$	$n = 36$

Probabilité de chaque situation

- Probabilité de recevoir un message avec k bits erronés
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = k) = \binom{36}{k} 0,001^k (0,999)^{36-k}$

On ne sait pas calculer comme précédemment la probabilité qu'un message erroné soit détecté, ou la probabilité qu'un message reconnu erroné soit bien corrigé car les configurations à dénombrer sont très nombreuses. En effet, si on détecte bien tous les messages erronés comportant une, deux ou trois erreurs, seulement une partie des messages erronés comportant quatre erreurs sont détectés, et la situation se complique encore pour les messages comportant au moins cinq erreurs. De plus, tous les messages comportant une seule erreur sont bien corrigés, mais, même lorsqu'ils sont détectés, les messages comportant plus d'une erreur sont tous pas ou mal corrigés. C'est pourquoi on se contente ci-dessous de mesurer globalement le succès et l'échec de ce code.

Message sans erreur

- Probabilité que le message reçu ne comporte pas d'erreur
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 0) = 0,999^{36} \approx 96,462\%$

Succès du code de double parité : message erroné détecté et bien corrigé

- On calcule le taux de messages erronés détectés et bien corrigés
- Probabilité que le message reçu comporte une ou des erreurs
  - ⋆ $1 - \mathcal{P}(X = 0) \approx 3,54\%$
- Probabilité que le message reçu comporte exactement une erreur
  - ⋆ $\mathcal{P}(X = 1) = 36 \times 0,001 \times 0,999^{35} \approx 3,48\%$
- Taux de messages erronés bien corrigés
  - ⋆ $\dfrac{\text{Proba erreur bien corrigée}}{\text{Proba erreurs}} \approx 98\%$

Échec du code de double parité

- En dehors des situations ci-dessus (zéro ou une seule erreur), le code est mis en échec : le message erroné reçu ou bien n'est pas détecté comme tel, ou bien n'est pas ou mal corrigé
- Probabilité qu'un message erroné ne soit pas détecté ou soit mal corrigé
  - ⋆ $1 - \mathcal{P}(X = 0) - \mathcal{P}(X = 1) \approx 0,06\%$
- Taux de messages erronés mettant le code en échec
  - ⋆ $\dfrac{\text{Proba erreurs non détectées ou mal corrigées}}{\text{Proba erreurs}} \approx 1,7\%$