

RALLYE MATHÉMATIQUE D'Auvergne 2013

16^e édition

C HERS collégiens et lycéens d'Auvergne, vous participez aujourd'hui à la seizième édition du « Rallye Mathématique d'Auvergne » dont le succès n'a plus à faire ses preuves.

En ce cinquantième anniversaire du traité de l'Élysée et de la coopération franco-allemande, dans le cadre du partenariat de l'académie de Clermont-Ferrand avec le ministère de l'éducation de Thuringe, nous saluons très chaleureusement les jeunes allemands des classes du Land de Thuringe qui nous font l'honneur de participer au Rallye.

Comme les années précédentes, l'équipe d'organisation du Rallye s'est mobilisée pour la phase qualificative de l'année 2013 et vous a élaboré des sujets aux thèmes variés et originaux. Elle espère que, tout en faisant preuve au sein de votre équipe, d'initiative, de perspicacité et aussi appel à vos connaissances et compétences, vous prendrez plaisir à les résoudre.

Bon courage à tous !

Françoise Barachet,
IA-IPR en mathématiques

Jean-Alain Roddier,
IA-IPR en mathématiques

Claire Marlias,
IEN en mathématiques-sciences

Contact

▷ **Xavier Malbert,**
professeur de mathématiques,
membre de l'APMEP
xavier.malbert@ac-clermont.fr

▷ **Joffrey Cottin,**
professeur de mathématiques,
joffrey.cottin@ac-clermont.fr

19 mars 2013

Épreuves Interclasses Troisièmes et Secondes

Les consignes

- Les calculatrices sont autorisées.
- La solution de chacun des quatre problèmes communs et des deux sujets correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes.
- Chaque feuille portera :
 - ★ le nom de la classe,
 - ★ le nom de l'établissement,
 - ★ le numéro du problème,
 - ★ ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
 - ★ l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
 - ★ l'argumentation,
 - ★ la présentation.

Exercices communs à tous les niveaux

Exercice 1 – Le code bancaire

Dans cet exercice, la notation \overline{ba} désigne le nombre $10b + a$.

Exemple : $\overline{23} = 10 \times 2 + 3$ (qui n'est autre que 23).

D , C et M sont respectivement les chiffres des dizaines, des centaines et des milliers du code bancaire de Robert. Ce code, composé de quatre chiffres, est un multiple de dix.

Trouver ce code sachant que :

$$M < C < D ; \overline{MM} + \overline{CC} + \overline{DD} = 209 \text{ et } M \times C \times D = 216.$$

Exercice 2 – Sorcellerie mathématique

Julien est un sorcier des mathématiques.

Il propose à ses amis le jeu suivant :

« Écrivez deux nombres entiers quelconques l'un en dessous de l'autre, puis en dessous la somme de ces deux nombres, puis en dessous la somme des deux nombres écrits juste au-dessus, et ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez écrit en tout dix nombres.

Dites-moi le septième nombre que vous avez écrit et je vous donnerai la somme des dix nombres écrits, sans même utiliser une calculatrice et sans rien savoir d'autre que ce septième nombre. »

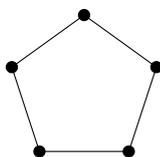
Tous ses amis font comme demandé et chaque fois Julien trouve la somme des dix nombres !

Pouvez-vous expliquer, grâce aux mathématiques, comment s'y prend Julien ?

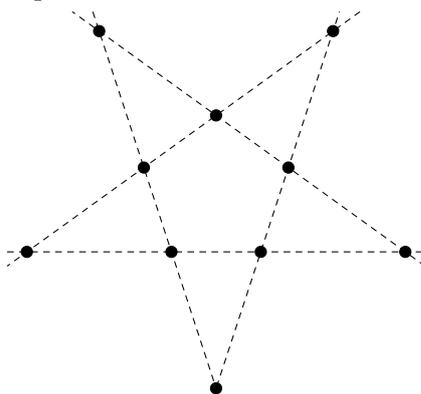
Exercice 3 – Les étoiles à cinq branches

Pour construire une belle étoile à cinq branches, bien régulière :

- on part d'un pentagone régulier, dont tous les côtés et tous les angles sont égaux, comme représenté ci-dessous :



- on prolonge les côtés jusqu'à leurs points d'intersection comme représenté ci-dessous :



- Trouver les angles du pentagone.
- En déduire les angles des cinq « pointes » de l'étoile.
- Julien a manqué de précision en réalisant son pentagone. Les mesures de quatre angles adjacents, dans cet ordre, de son pentagone sont 100° , 110° , 115° et 95° .
Quelles seront alors les mesures des angles des pointes de son pentagone, dans l'ordre des aiguilles d'un montre, en commençant par la pointe correspondant aux angles de 100° et 110° ?

Exercice 4 – Les sportifs

Dans le collège des Puy, trois sports sont proposés : 311 élèves font du tennis, 256 élèves font du rugby et 215 élèves font de la gymnastique.

Il y a malheureusement 16 élèves qui ne font aucun sport. Par contre, 27 élèves pratiquent les trois sports, 92 ne font que du tennis et de la gymnastique, 87 ne font que du tennis et 22 font seulement de la gymnastique.

Combien y a-t-il d'élèves dans ce collège ?

Exercices spécifiques collège

Exercice 5 – Le compas rouillé

Une droite (D) est tracée sur une feuille non quadrillée. M est un point de cette droite.

Je ne possède qu'une règle non graduée et un compas ouvert tellement rouillé que je ne peux plus changer son écartement.

Construire la perpendiculaire à (D) en M .

Exercice 6 – Et si la somme était 93 ?

Raphaël remplace les six nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 d'un dé cubique, par six autres nombres entiers positifs et consécutifs.

En ajoutant les nouveaux nombres de deux faces opposées, on obtient toujours 93.

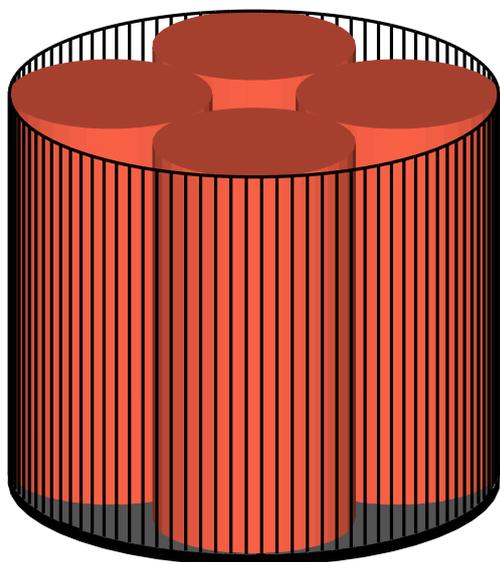
Quels sont, maintenant, les nouveaux nombres inscrits sur les 6 faces du dé ?

Exercices spécifiques lycée général et lycée technologique

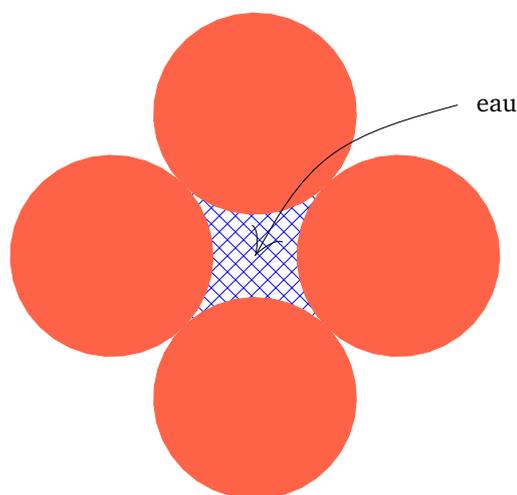
Exercice 7 – Le vase

Un vase formé par quatre cylindres identiques est vendu dans une boîte cylindrique.

Cette boîte est la plus petite possible de cette forme à contenir ce vase. Les quatre cylindres formant le vase touchent tous l'intérieur de cette boîte.



Vase dans sa boîte



Vase vue de dessus

Quelle est la capacité maximale du vase sachant que le diamètre intérieur de la boîte mesure 16 cm et que la hauteur intérieure du vase mesure 35 cm ?

Exercice 8 – Le nombre mystère

Je pense à un nombre de deux chiffres.

Si j'écris un 5 à la droite de ce nombre, il augmente de 707.

Quel est le nombre auquel je pense ?

Exercice 9 – Les dés empilés

Les dés sont des cubes dont les faces sont numérotées selon la règle suivante :

« La somme des points figurant sur deux faces opposées est égale à 7. »

Quatre dés sont empilés dans le tube ci-contre, combien de points y a-t-il en tout sur les faces horizontales de ces dés, que vous ne pouvez pas voir ?



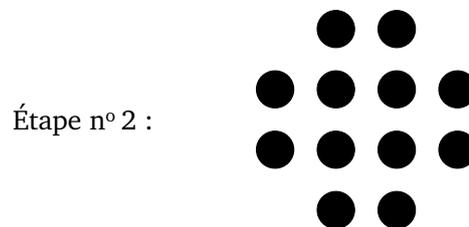
Exercice 10 – Les jetons de Karim

Karim possède 10 400 jetons.

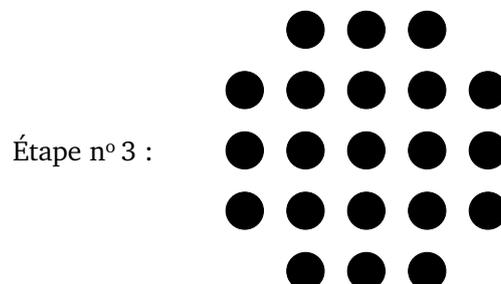
Il pose cinq jetons comme sur le motif ci-dessous :



Il complète le motif précédent comme ci-dessous :



Puis il complète ce dernier pour obtenir :



Et ainsi de suite ...

(a) Combien de jetons le motif contient-il de jetons à la dixième étape ? Et à la vingtième étape ?

(b) Au bout de plusieurs jours, Karim a eu le courage d'utiliser tous ses jetons ! Saurez-vous trouver le numéro de la dernière étape ?