

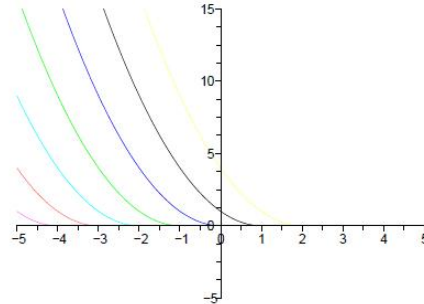
L'équation différentielle du seau percé¹

$$f'(t) = -C\sqrt{f(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}_+^*$$

Il ne faut pas beaucoup d'efforts² pour vérifier que les fonctions définies de la manière suivante sont solutions

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \rightarrow & \begin{cases} \frac{C^2}{4}(t-t_0)^2 & \text{si } t \leq t_0 \\ 0 & \text{si } t_0 \leq t \end{cases} \end{cases}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$.



On obtient ainsi une infinité de solutions satisfaisant la condition $f(0) = 0$.

Extrait du programme de l'agrégation interne :

Solutions d'une équation $x' = f(t; x)$, ou $x'' = f(t; x; x')$, où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz dans le cas C^1 : existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

Théorème

Supposons que la fonction f soit de classe C^1 dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale³ (définie dans un voisinage de t_0).

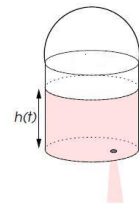
Quel est le problème ?

Cette équation différentielle peut être obtenue par modélisation du problème de la vidange d'un seau percé :

Soit A la section du seau et a celle du trou. La hauteur d'eau à l'instant t est $h(t)$ et $v(t)$ sa vitesse d'écoulement.

L'équation de conservation de l'eau donne $Ah'(t) = av(t)$.

L'équation de conservation de l'énergie donne $v(t)^2 = 2gh(t)$ (loi de Torricelli établie vers 1640).



La formule de Torricelli donna lieu à une forte controverse lors de son établissement car elle n'était pas validée par l'expérience. C'est finalement Newton qui trouva la clé de la divergence entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. La mesure directe de la vitesse était impossible à cette époque. On tentait donc de vérifier cette formule en déterminant la vitesse à partir de la mesure (a) du débit volumique du liquide qui coule, en effet : $q_v = sv$ La mesure de v est fautive si on prend la section du trou comme surface a . C'est Newton qui s'aperçut que les filets de courant convergent à la sortie du trou et qu'il faut considérer une section contractée s_c à la place de la section du trou. Moyennant cette précaution, la formule de Torricelli s'applique parfaitement pour les liquides près de l'idéalité.

(a) Cette mesure est très facile à effectuer par empotage. On mesure le temps nécessaire au remplissage d'un pot de volume connu

d'après un cours de l' IUT de Nice, Département Génie Electrique et Informatique Industrielle, 1ère Année : Histoires d'Eau Bases de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique, Jean Demartini © 30 novembre 2001

2. Il est beaucoup plus difficile de démontrer que les seules solutions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ sont des restrictions des fonctions définies ci-dessus.

3. Une solution d'une équation différentielle est un COUPLE (I, x) , où I est un intervalle sur lequel la fonction x est dérivable et solution de l'équation. Elle est maximale si pour toute autre solution (x_1, J) telle que $I \subseteq J$ et pour tout t de I , on a $x(t) = x_1(t)$, alors $I = J$ (donc $x_1 = x$).