Etude de l'intégrabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

• f est continue par morceaux sur tout $[0;\alpha]$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$F(x) = \int_1^x \frac{sin(t)}{t}dt$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ appellée un sinus intégral.

• Pour obtenir la convergence en $+\infty$, on utilise une IPP pour augmenter le degré du dénominateur :

$$F(x) = \int_1^x \frac{sin(t)}{t}dt = \left[\frac{cos(1)}{1} - \frac{cos(x)}{x}\right] - \int_1^x \frac{cos(t)}{t^2}dt$$

$\frac{cos(t)}{t^2}$ définit une fonction intégrable sur $[1;+\infty]$ car $\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty]$, donc $\int_1^x \frac{cos(t)}{t^2}dt$ donc $F(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$

• $\left|\frac{sin(t)}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$ ne permet pas de conclure l'intégrabilité. Cependant, on ne voit pas clairement la non intégrabilité : ASTUCE ! $|sin(t)| \geq sin^2(t)$ d'où

$$\int_1^x \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \int_1^x \frac{sin^2(t)}{t}dt = \int_1^x \frac{1 - cos(2t)}{2t}dt = \int_1^x \frac{1}{2t}dt - \int_1^x \frac{cos(2t)}{2t}dt$$

La première intégrale tend vers $+\infty$ et la deuxième a une limite par une étude du même type que pour le sinus.

La méthode suivante est plus naturelle :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \int_{(k+\frac{1}{4})\pi}^{(k+\frac{3}{4})\pi} \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{(k+\frac{3}{4})\pi}$$

On conclut de la manière suivante :

$$\int_0^x \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \int_0^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \pi} \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \sum_{k=0}^{k=\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor - 1} \int_{(k+\frac{1}{4})\pi}^{(k+\frac{3}{4})\pi} \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{k=\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor - 1} \frac{1}{(k+\frac{3}{4})\pi}$$

Variante : $\int_{(k+\frac{1}{4})\pi}^{(k+\frac{3}{4})\pi} \left|\frac{sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2} ln\left(\frac{(k+\frac{3}{4})\pi}{(k+\frac{1}{4})\pi}\right)$

• **Complément :** le calcul de la limite du sinus intégral provient de trois observations :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2n+1)t)}{sin(t)}dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2n+1)t)}{t}dt$$

$$\text{et} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{sin(t)} - \frac{1}{t}\right) sin((2n+1)t)dt = 0$$

Le deuxième est un changement de variable simple

Le premier provient de $\dfrac{sin((2n+1)t)}{sin(t)} = \dfrac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n} cos(2kx)$ à vérifier.

Enfin $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi(t)sin(nt)dt = 0$ pour les fonction ϕ dans $C^1([a;b])$.

- Variantes

Etude de l'intégrabilité des fonctions f_α définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \dfrac{sin(x)}{x^\alpha}$, où $\alpha \geq 0$

Etude de l'intégrabilité des fonctions f_β définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\beta(x) = sin(x)x^\beta$, où $\beta \geq 0$.

série divergente

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{it}}{\sqrt{t}}$.

On note g la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{it}}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{t}$.

Etudier l'intégrabilité des fonctions f et g.

Etudier les limites quand a tend vers $+\infty$ de $\int_1^a f(t)dt$ et $\int_1^a g(t)dt$.

Vérifier que les fonctions f et g sont équivalentes.