Rallye Mathématique d'Auvergne 2021

∾ 24e édition ∾

RALLYE MATHÉMATIQUE d'AUVERGNE

À vous, maintenant, jeunes collégiens et lycéens d'Auvergne de faire preuve de vos qualités de réflexion, d'initiative et d'imagination !

Au sein de votre équipe, les connaissances et compétences de chacun seront nécessaires pour venir à bout des exercices originaux et astucieux que l'équipe d'élaboration des sujets vous a préparés.

Mais malgré les difficultés que vous allez rencontrer, vous devez en être persuadés, le succès est à votre portée !

Bon rallye 2021 !

Jean-Alain RODDIER,
IA-IPR Mathématiques

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND
Liberté Égalité Fraternité

IREM Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Clermont-Ferrand

APMEP

Mardi 9 mars 2021

Epreuves qualificatives

Durée : 2 h – Niveaux : 3e et 2de

Les consignes :

- Les calculatrices et les ordinateurs **sans accès internet** sont autorisés. L'utilisation des téléphones portables et des objets connectés est interdite.
- Toute utilisation de l'outil informatique donnera lieu à l'envoi d'un fichier à l'adresse : rallye.mathematique@ac-clermont.fr sous le format classe_etablissement_numeroexercice.extensiondufichier (par exemple 2A_lyceeduval_4.xls ou 3e3_collegedubois_5.ggb).
  ⚠ Seuls les envois à partir d'une **adresse courriel académique** seront acceptés.
- Ce sujet est composé de 7 problèmes répartis en 3 niveaux de difficulté. Une même classe ne peut rendre qu'**une seule réponse** par problème. Chaque réponse sera rédigée sur une ou plusieurs fiche·s-réponse·s (le problème 1 est accompagné de sa propre fiche-réponse).
- Chaque fiche-réponse sera paginée et portera :
  — le nom et la ville de l'établissement ;
  — le nom de la classe ou du groupe ;
  — l'effectif présent ;
  — le numéro du problème.
- **Pour chaque problème**, sauf indication contraire, **le jury évaluera** :
  — l'exactitude des réponses aux questions posées ;
  — l'argumentation ;
  — la présentation ;

… et appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.

Conception et rédaction : IREM, APMEP

Contact : rallye.mathematique@ac-clermont.fr

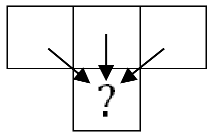
Problème 1

DESSIN PROCEDURAL

NIVEAU 1

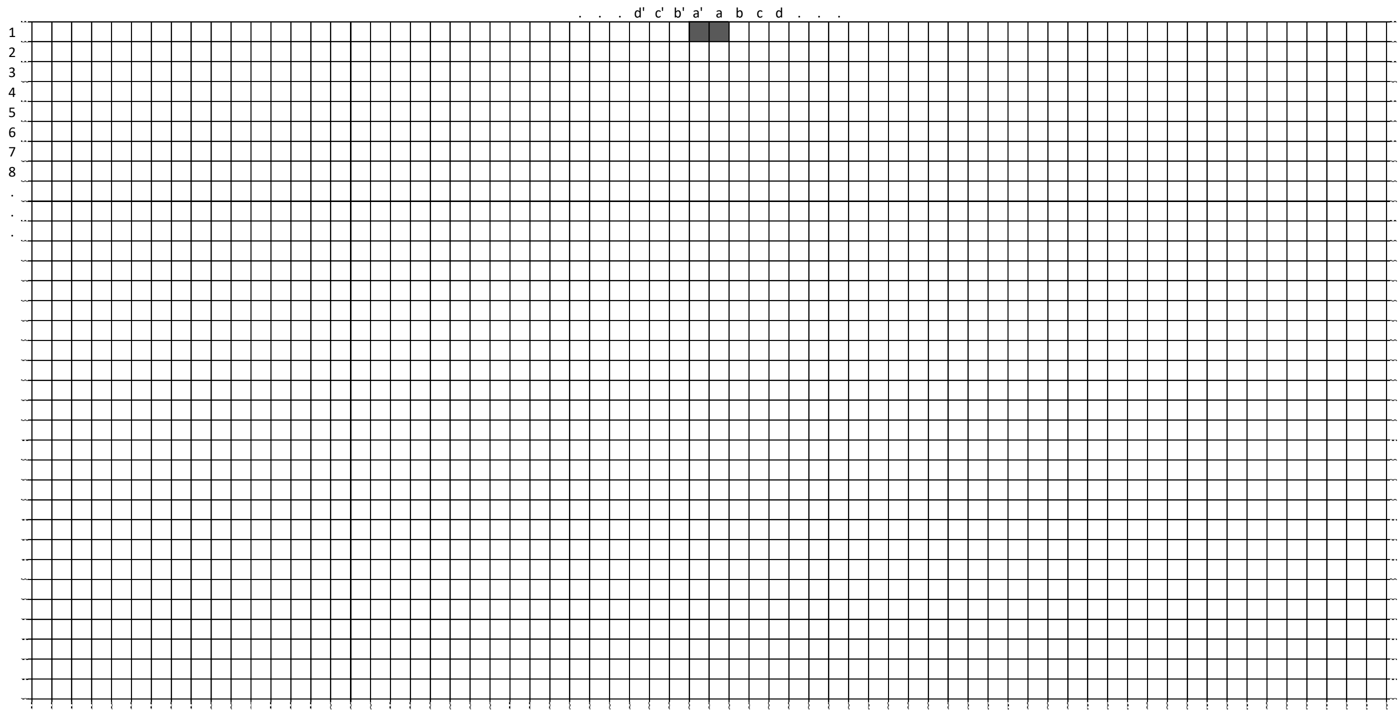
Pour réaliser le dessin suivant, on part d'abord d'une grille prolongeable à loisir vers la gauche, la droite et le bas.

On la remplit ensuite ligne par ligne en colorant certaines cases en noir. Pour une case, on regarde les trois cases qui se trouvent au-dessus :



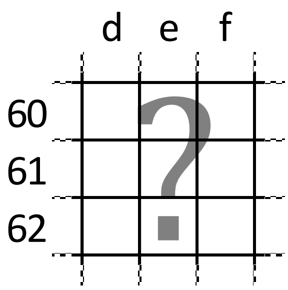
- si elles sont toutes les trois de la même couleur, alors la case à colorier reste blanche ;
- sinon, la case est à colorier en noir.

La ligne 1 de la grille ci-dessous est déjà remplie avec deux cases noires en a1 et a'1 et des cases blanches partout ailleurs :



1/ Complétez la grille ci-dessus.

2/ Si l'on prolongeait la grille ci-dessus, comment seraient coloriées les neuf cases des lignes 60, 61 et 62 et des colonnes d, e et f ?



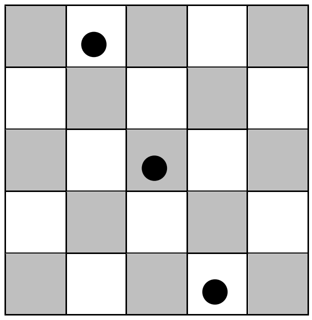
Problème 2

TERRIBLES ECHIQUIERS

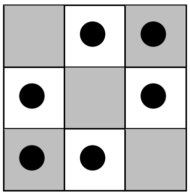
NIVEAU 1

Le but de ce problème est de résoudre plusieurs petits exercices où vous devrez placer des pions au centre de cases d'échiquiers de telle sorte que jamais trois pions (ou plus) ne soient alignés.

On précise que les alignements interdits concernent n'importe quelle direction et pas seulement « en ligne », « en colonne » ou en « diagonale principale ». Par exemple, la disposition ci-contre à droite est un alignement interdit.



On rappelle que les pions doivent être centrés dans les cases.



On donne ci-contre à gauche un exemple résolu de cet exercice où l'on devait placer 6 pions sur un échiquier de taille 3×3.

Résolvez les cinq exercices suivants :

a. Placer 8 pions sur un échiquier de taille 4×4.

b. Placer 10 pions sur un échiquier de taille 5×5.

c. Placer 12 pions sur un échiquier de taille 6×6.

d. Placer 14 pions sur un échiquier de taille 7×7.

e. Placer 16 pions sur un échiquier de taille 8×8.

<u>Indication sur la notation :</u> pour cet exercice, seules l'exactitude des réponses et la présentation seront évaluées ; aucune argumentation n'est demandée.

ALEALGO

NIVEAU 2

Voici un algorithme, programmé d'une part avec le logiciel Scratch, et d'autre part en langage Python :

Avec Scratch :	**Avec Python :**
	see code below


```python
from random import randint

A = randint(1,5)
B = randint(1,5)
X = A + B
for n in range(1,201) :
    if X % 2 == 0 :
        X = X / 2
    else :
        X = 3 * X + 1
print(X)

```

__Précision :__

• *Soient a et b deux nombres entiers positifs avec b non-nul.*
L'étiquette a modulo b *et l'opération* `a%b` *renvoient le reste de la division euclidienne de a par b.*

• *Soient a et b deux nombres entiers.*
L'étiquette nombre aléatoire entre a et b *et la fonction* `randint(a,b)` *renvoient un nombre entier aléatoire entre a et b équiprobablement (a et b inclus).*

Quelles sont les différentes valeurs possibles de X à la fin du programme ? et quelle est la probabilité d'apparition de chacune de ces valeurs ?

Problème 4

CHIFFRES CODES

NIVEAU 2

Dans le texte suivant, les chiffres ont été remplacés par des symboles étranges ; à chaque chiffre son symbole, à chaque symbole son chiffre.

<u>*Indications :*</u>

- *Les dates sont données en format français « jour / mois / année ».*
- *Il n'y a aucun 0 inutile dans le texte sauf pour les mois dans les dates comme par exemple pour le 5 février 745 qui serait noté 5/**0**2/745.*

Nicolas Bourbaki est un mathématicien fictif. Il fut inventé par un groupe de mathématiciens francophones, formé il y a Ʊ∅ ans en ♁ʢѪ₪ à Besse en Auvergne avec pour objectif de rédiger en Ѫ ans un traité d'analyse. Finalement, le premier chapitre nécessitera ▷ ans à lui-seul et rapidement le projet deviendra la rédaction d'un traité sur la mathématique toute entière. L'ampleur de la tâche est telle qu'elle se poursuit encore aujourd'hui.

Ses premières publications sont novatrices et on doit au groupe « Bourbaki » la popularisation de nombreux symboles, termes et notions aujourd'hui incontournables en mathématiques, mais aussi un style d'écriture précis dans la formulation des mathématiques.

Bourbaki, c'est aussi de nombreux textes humoristiques que le groupe publie dans sa revue interne. Le nom de famille « Bourbaki » lui-même a pour origine un canular : en ♁ʢ⟁Ѫ (soit ♁⟁ ans avant la formation du groupe à Besse), un étudiant de l'ENS, déguisé en vieux barbu, a donné une fausse conférence, volontairement incompréhensible et avec des raisonnements subtilement faux.

Finalement, c'est ♁✠ ans après la formation du groupe à Besse que « Bourbaki » se constitue en association le Ѫʡ/ʡƱ/♁ʢ₪⟁. Depuis, les membres se sont renouvelés dans le secret ! En effet, les noms des membres actuel·le·s du groupe ne sont pas connus.

Tout comme le style ou les canulars, l'aura de mystère de cette société secrète de mathématiciens fait partie intégrante de l'identité de Bourbaki.

Retrouvez à quel chiffre correspond chaque symbole pour que le texte soit cohérent.

Problème 5

LE TOUR DU PATE DE MAISON

NIVEAU 2

Je fais le tour du pâté de maison en marchant tandis que ma sœur le fait en courant dans le même sens plusieurs fois. Nous partons en même temps et nous arrivons en même temps. Entre temps, ma sœur me double deux fois.

1/ Si elle avait couru dans l'autre sens et que nous avions maintenu nos allures respectives, combien de fois m'aurait-elle croisé ?

Certains jours, notre chien nous accompagne. Il part avec moi, mais dès que ma sœur passe à notre niveau, il me quitte pour la suivre. De même, lorsqu'il repasse à côté de moi avec ma sœur, il l'abandonne pour rester avec moi, et ainsi de suite jusqu'à notre retour à la maison.

Le tour du pâté de maison fait 3 km.

2/ Quelle est la distance parcourue par notre chien si ma sœur et moi avançons à vitesse constante :

a. dans le même sens ?

b. en sens inverse ?

3/ Nous faisons toujours le même nombre de tours chacun mais sans garder une vitesse constante. Déterminez, si possible, la distance parcourue par le chien si ma sœur et moi avançons :

a. dans le même sens ?

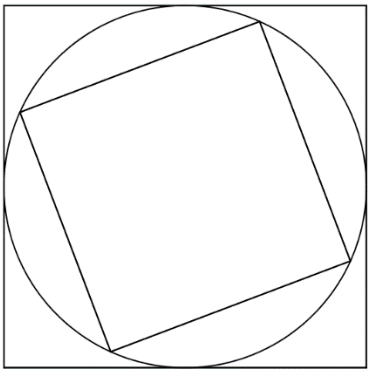
b. en sens inverse ?

Si ce n'est pas possible, déterminez à la place un encadrement, le plus précis possible, de cette distance.

LES HEXAGONES

NIVEAU 3

Lorsqu’un carré est inscrit dans un cercle lui-même inscrit dans un carré (comme dans l’exemple ci-dessous), l’aire du petit carré représente exactement la moitié de l’aire du grand carré.



Lorsqu’un hexagone régulier est inscrit dans un cercle lui-même inscrit dans un hexagone régulier, quelle fraction de l’aire du grand hexagone représente l’aire du petit hexagone ?

Problème 7

DU TRAVAIL POUR PENELOPE

NIVEAU 3

Dans cet exercice, on s'intéresse à la construction de « tapis de Pénélope » (en référence au personnage mythologique grec qui chaque jour et chaque nuit faisait et défaisait son ouvrage).

<u>Réalisation d'un tapis de Pénélope :</u>	*<u>Exemple :</u>*
On part d'un nombre entier positif.	48
On le réécrit comme un produit de deux facteurs.	8×6
On recommence en réécrivant l'un des facteurs comme un produit de deux facteurs.	$4 \times 2 \times 6$
Ainsi de suite…	$4 \times 2 \times 3 \times 2$
… jusqu'à ce ne soit plus possible.	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2$
Lorsqu'il n'est plus possible de continuer, on multiplie deux par deux des facteurs adjacents…	$2 \times 4 \times 3 \times 2$
…	$2 \times 4 \times 6$
…	2×24
… jusqu'à ce qu'on arrive à un seul nombre.	48

Il faut aussi respecter les deux règles suivantes :

- Seulement des facteurs entiers et strictement supérieurs à 1.
- Jamais deux fois la même ligne écrite (sauf la première et la dernière).

<u>Exemple :</u> En partant de 8, il n'existe que 2 tapis possibles :

8 2 × 4 2 × 2 × 2 4 × 2 8	8 4 × 2 2 × 2 × 2 2 × 4 8	*Les lignes peuvent se répéter d'un tapis à l'autre. Les lignes* 2 × 4 *et* 4 × 2 *sont deux lignes différentes.*	~~8 **2 × 4** 2 × 2 × 2 **2 × 4** 8~~	*… n'est pas valide parce qu'il contient deux fois la ligne* 2 × 4.

1/ Dressez les 6 tapis de Pénélope possibles à partir de 12.

2/ Combien existe-t-il de tapis de Pénélope à partir du nombre 225 ?

ORGANISATEURS

Académie de Clermont-Ferrand
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Clermont-Ferrand
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

PARTENAIRES

Volvic, Cruzilles, le Conseil général du Cantal, les villes de Saint-Flour et de Cournon d'Auvergne, l'Université Clermont Auvergne, le Centre National de la Recherche Scientifique, le Comité International du Jeux Mathématique, Texas Instruments et Numworks.