TD 7 : Limites de suites

Objectifs :

- Connaître la limite d'une suite géométrique
- Savoir utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement
- Savoir étudier ou utiliser la convergence d'une suite

Enoncé 1 :

1. Soit a un réel strictement positif.
   Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. En déduire pour q réel tel que $q > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
3. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

   (indication : on posera $q' = \dfrac{1}{q}$)
4. Si $-1 < q < 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$
5. Qu'en est-il si $q \leq -1$?

Enoncé 2 :

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q\, u_n$.
   Exprimer u_n en fonction de n.
2. Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

   a) $u_0 = 2$ et $q = \dfrac{2}{3}$

   b) $u_0 = -3$ et $q = \dfrac{1}{4}$

   c) $u_0 = 3$ et $q = \dfrac{3}{2}$

   d) $u_0 = -5$ et $q = 2$

   e) $u_0 = 2$ et $q = -3$
3. Discuter, suivant les valeurs de u_0 et de q, la convergence de la suite (u_n)

Enoncé 3 :

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 4$.
2. Montrer que la suite u est strictement croissante.
3. En déduire la convergence de u.
4. Déterminer la limite de u.

Enoncé 4 : …..