Problème : on dispose d'une matrice qu'on soupçonne être orthogonale ; on cherche la nature d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien dont elle serait la matrice sur une base orthonormée

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Vérifier que A est une matrice orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme u dont elle est la matrice sur la base canonique.

On détermine l'ensemble des vecteurs invariants et / ou l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés.

Invariants

$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+6y-3z &=& 7x \\ 6x+3y+2z &=& 7y \\ -3x+2y+6z &=& 7z \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y-z &=& 0 \\ 3x-2y+z &=& 0 \\ -3x+2y-z &=& 0 \end{array}\right.$ soit le plan d'équation $-3x+2y-z=0$.

Il suffit de vérifier maintenant (si on fait confiance à l'énoncé [a]) que le vecteur $(3;-2;1)$ est transformé en son opposé, ce qui est le cas. La matrice est celle d'une reflexion de plan orthogonal à $(3,-2,1)$.

[a] si on fait confiance à l'énoncé ou si l'énoncé est plus ouvert, on détermine les vecteurs transformés en leurs opposés :
$\left\{\begin{array}{l} -2x+6y-3z=-7x \\ 6x+3y+2z=-7y \\ -3x+2y+6z=-7z \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} 5x+6y-3z=0 \\ 3x+5y+z=0 \\ -3x+2y+13z=0 \end{array}\right.$ soit ....

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. $B = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A quelle condition B est-elle une matrice orthogonale ? Déterminer alors la nature de l'endomorphisme u dont elle est la matrice sur la base canonique.

Invariants

$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z &=& -\frac{3}{2}x \\ \frac{a}{b}x-\frac{1}{2}y+\frac{c}{b}z &=& -\frac{3}{2}y \\ \frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y-\frac{1}{2}z &=& -\frac{3}{2}z \end{array}\right.$ soit $ax+by+cz=0$. On obtient un plan d'invariant (ni a, ni b, ni c ne sont nuls). Donc quand cette matrice sera orthogonale, ce sera la matrice d'une symétrie orthogonale

Transformés en leurs opposés

$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}z &=& \frac{3}{2}x \\ \frac{a}{b}x-\frac{1}{2}y+\frac{c}{b}z &=& \frac{3}{2}y \\ \frac{a}{c}x+\frac{b}{c}y-\frac{1}{2}z &=& \frac{3}{2}z \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} -2ax+by+cz &=& 0 \\ ax-2by+cz &=& 0 \\ ax+by-2cz &=& 0 \end{array}\right.$ dont les solutions sont les vecteurs colinéaires à $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Si la matrice est orthogonale, ce vecteur doit être orthogonal au plan des invariants, donc colinéaire à $(a;b;c)$. On vérifie facilement qu'une CNS est que $a^2=b^2=c^2$. Réciproquement, si cette condition est remplie, l'endomorphisme associé à la matrice est une symétrie par rapport au plan d'équation $ax+by+cz=0$. [a].

[a] il n'est donc pas nécessaire de vérifier l'orthogonalité de la matrice

Etudier $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.