Déroulement des séances avec une classe de 4e :

Les séances viennent après 3 semaines de travail sur le théorème des milieux et le théorème de Thalès.

Enoncé 1 : (tâche complexe de Stéphanie Convinhes)

Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries.

On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre initial de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

On demande l'écriture décimale exacte de ce nombre.

Narration de séances

Séance n°1 : Les élèves commencent à travailler individuellement(5 minutes). Pour cette activité, toutes les ressources sont à leur disposition. Les documents de cours , les livres, calculettes , et ordinateurs sont autorisés.

Pour de nombreux élèves, la première réponse est : « $24\times3=72$ Au bout de 24 heures, il y a 72 bactéries »

Il y a confusion entre le modèle additif : la répétition d' un ajout de 3 et du modèle multiplicatif : répétition d'une multiplication par 3.

Notons que cette erreur est persistante. Les élèves confondent a^n et $a\times n$, pour a nombre relatif non nul et n entier .

D'autres commencent à calculer étape par étape, au bout d'heure, de deux heures....etc

Un point est fait oralement sur la compréhension du sujet mais aucune solution n'est évoquée.

C'est alors que les élèves sont mis en groupes (3 ou 4). Les groupes sont formés à leur convenance par affinités.
La solution qui consiste à adopter un modèle additif est alors mise en défaut par les autres membres du groupe. Ils se rendent compte que le nombre de bactéries dès les premières étapes est beaucoup plus grand que 72......
Un seul groupe résiste et est d' accord sur la solution de72 bactéries. Je leur demande donc d' écrire au bout de 1 h, de deux heures , de trois heures ….Le groupe comprend que leur résultat ne convient pas.
Rapidement dans la classe le produit de 24 facteurs égaux à 3 arrive comme solution.

$3\times24=72$

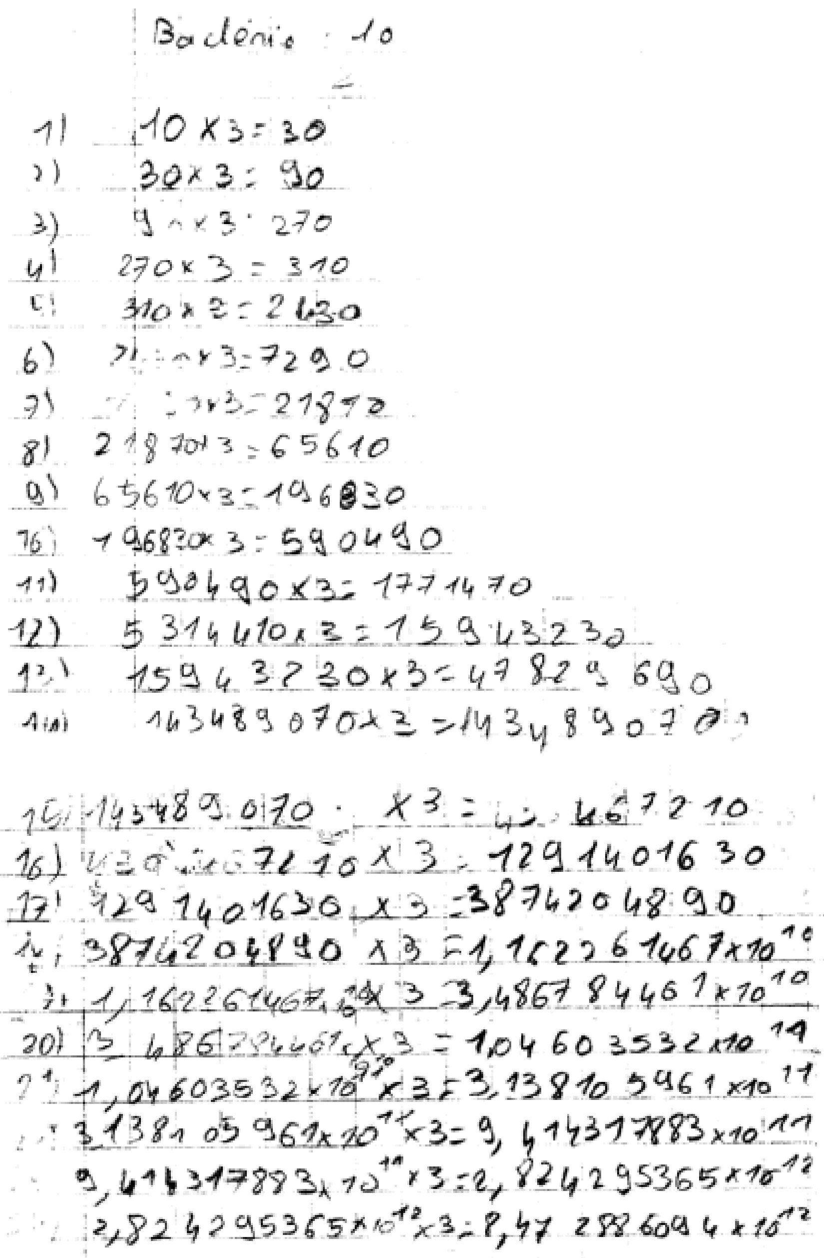
$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times$
$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=$
$2{,}82429\,5365\times10^{11}$

Il leur reste comme tâche à calculer cette multiplication et de donner l'écriture décimale exacte de ce nombre.

Certains écrivent toutes les étapes et calculent à chaque étape ..d' autres écrivent uniquement le résultat. Tous les groupes se servent de la calculette pour trouver l' écriture décimale du nombre. Ceux qui ont fait étape par étape sont bloqués à l' étape 21. En effet la calculette renvoie un nombre écrit à l' aide de puissance de 10. La notation puissance n' a pas été vue et ils ne savent pas lire ce nombre. Ils me demandent donc ce que cela veut dire. Je leur explique alors que 10^{10} signifie

$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$

Ils comprennent qu'il s' agit de multiplications par 10 et donc qu'il s'agit rajouter des zéros.
Ils trouvent des résultats donnés par la calculette.
Le nombre initial de bactéries n' étant pas donné, certains raisonnent avec une bactérie, un autre groupe avec 10.



D'autres introduisent une lettre.

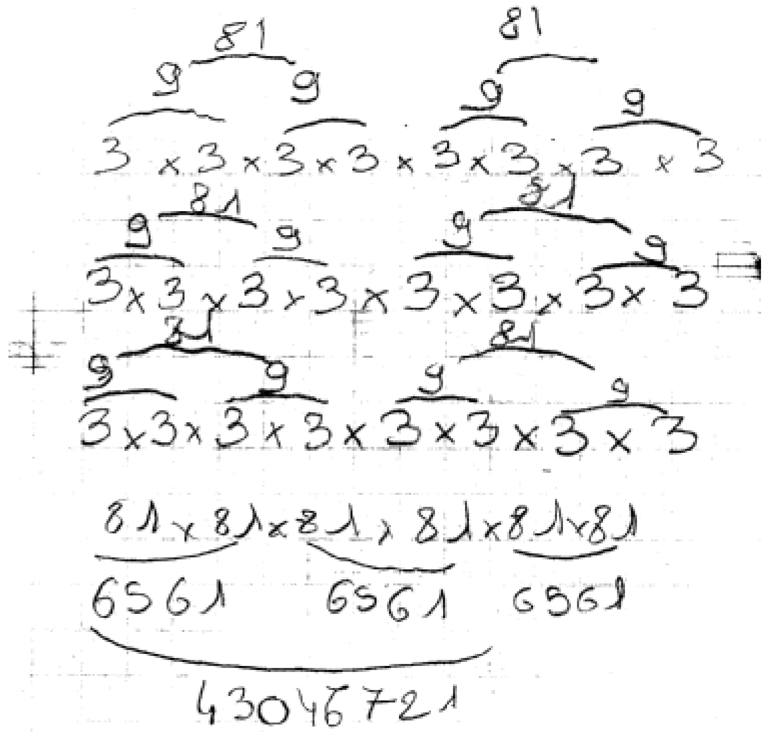
Calcul : 1x3x3x3x3x3 x3 x3x3x3x3 x3x3x3
x3 x3x3 x3 x3 x3x3x3 x3 x3x3x3.

Calcul pour 2 bactéries: 2x3x3x3x3x3x3x3x3x3
x3 x3 x3 x3 x3 x3x3 x3 x3 x3x3x3x3x3.

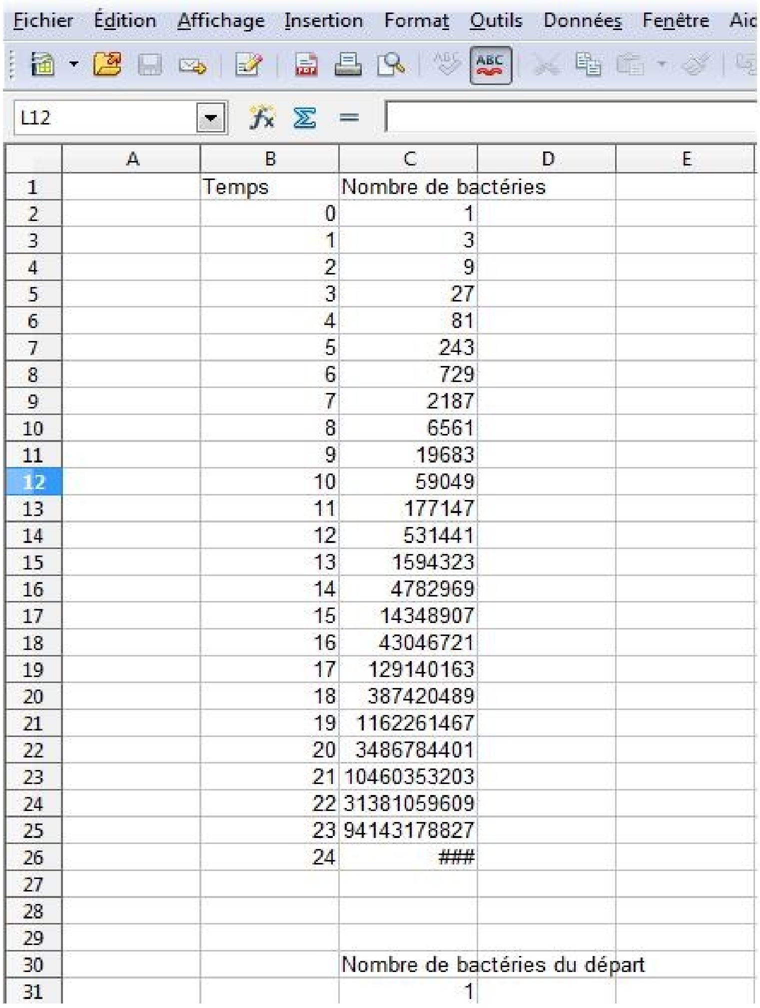
Quand on connait pas le nombre de bactéries: zx3
x3x3x3x3x3x3 x3x3 x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3
x3x3z.

L' introduction du calcul littéral ne pose pas de problème majeur.

Parallèlement un autre groupe a commencé de calculer en posant les multiplications à la main et en faisant des regroupements.



D'un autre côté, d'autres, qui réitèrent la multiplication par 3 en appuyant 23 fois   sur la calculette sont bloqués pour la même raison. Ce groupe reste arrêté par cet obstacle.
L'un des groupes me demande l' accès à l' ordinateur. Ils essaient de trouver le résultat grâce à la calculette de l' ordinateur mais se retrouvent bloqués par le même problème d' écriture. Ils essaient alors d' utiliser le tableur.
Voilà ce qu'ils trouvent :



	A	B	C	D	E
1		Temps	Nombre de bactéries		
2		0	1		
3		1	3		
4		2	9		
5		3	27		
6		4	81		
7		5	243		
8		6	729		
9		7	2187		
10		8	6561		
11		9	19683		
12		10	59049		
13		11	177147		
14		12	531441		
15		13	1594323		
16		14	4782969		
17		15	14348907		
18		16	43046721		
19		17	129140163		
20		18	387420489		
21		19	1162261467		
22		20	3486784401		
23		21	10460353203		
24		22	31381059609		
25		23	94143178827		
26		24	###		
27					
28					
29					
30			Nombre de bactéries du départ		
31			1		

Les colonnes n'étant pas assez grandes l' ordinateur ne leur donne pas la solution.
A la fin de l' heure ils vont dans la cellule, changent le « format » et finissent par trouver le nombre exact.(282 429 536 481)
Les autres groupes voient leurs camarades sur l'ordinateur et savent qu'ils ont trouvé. Ils sont intrigués et se demandent s'il faut utiliser l' ordinateur et pourquoi faire ?

Travail pour la séance suivante : réviser les fiches sur le fonctionnement du tableur

Séance 2 :
En pleinière
Après un bref rappel de l' énoncé du problème, j 'introduis la notation puissance aux élèves. Avant même que je ne l'introduise ce mot était déjà sorti mais aucun ne savait réellement ce que cela voulait dire .Ils l' avaient déjà entendu en sciences physiques.

Nous utilisons une feuille de correction. A l' oral, je leur fais travailler la notation puissance « Et si les bactéries se multiplient par 5 , par 4 par 10 … ».Ils expriment les résultats à l' aide de puissances de 5, de 4 , de 10.
J'introduis aussi la notation 3^0 qui apparait naturellement au bout de 0 heure.

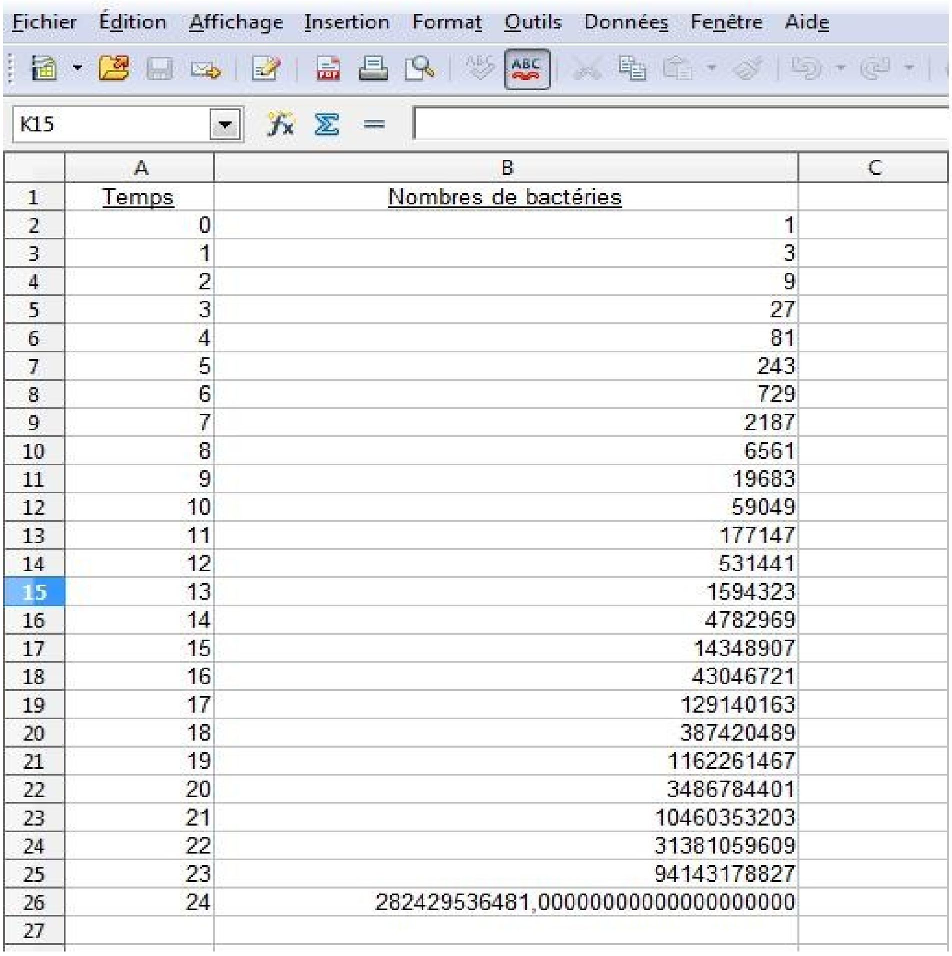
Ils voient là l'intérêt d'une telle notation qui permet d' écrire les résultats sous forme condensée.
Contrairement à un enseignement classique où la question « ça sert à quoi ? » apparaît, ici aucun élève ne le demande et tous paraissent convaincus par une telle notation.
Nous nous arrêtons de donner les résultats au bout de 21 heures de prolifération des bactéries.

Nous faisons le point sur les pistes trouvées par les différents groupes.
Deux groupes ont trouvés un nombre final de bactéries au bout de 24 heures:

- le groupe tableur
- un groupe qui a réussi à écrire le résultat en partant du résultat de la calculette et en rajoutant les zéros nécessaires.
  Nous confrontons alors les résultats sans expliquer la démarche.

  Problème :
  Le groupe tableur trouve : 282 429 536 481
  Le groupe calculette trouve : 282 429 536 500

- Les résultats sont différents ! Qui a tort ? Qui a raison?
  Je rebondis sur le fait qu'un groupe a utilisé l'informatique. Ils nous expliquent à l' oral ce qu'ils ont fait.
  Je demande aux autres élèves de résoudre le problème de la même manière avec l' aide du tableur..



	A	B	C
1	Temps	Nombres de bactéries	
2	0	1	
3	1	3	
4	2	9	
5	3	27	
6	4	81	
7	5	243	
8	6	729	
9	7	2187	
10	8	6561	
11	9	19683	
12	10	59049	
13	11	177147	
14	12	531441	
15	13	1594323	
16	14	4782969	
17	15	14348907	
18	16	43046721	
19	17	129140163	
20	18	387420489	
21	19	1162261467	
22	20	3486784401	
23	21	10460353203	
24	22	31381059609	
25	23	94143178827	
26	24	282429536481,0000000000000000000	
27			

Le groupe l' ayant déjà fait continue de travailler cette fois – ci sur papier
A la fin de l' heure tous les groupes ont fini le travail et l' ont envoyé leur fichier via l'ENT. Ceci me permet au passage de valider quelques compétences pour le B2i .

Travail pour la séance suivante : recherche internet : qu' est ce que SOBIG ?
Séance 3 :
En pleinière :
Bref rappel du problème :
Les élèves sont tous convaincus que le résultat trouvé par le tableur est juste mais alors pourquoi le résultat trouvé par l'un des groupes est il différent et par conséquent faux ? Ils pensent avoir fait

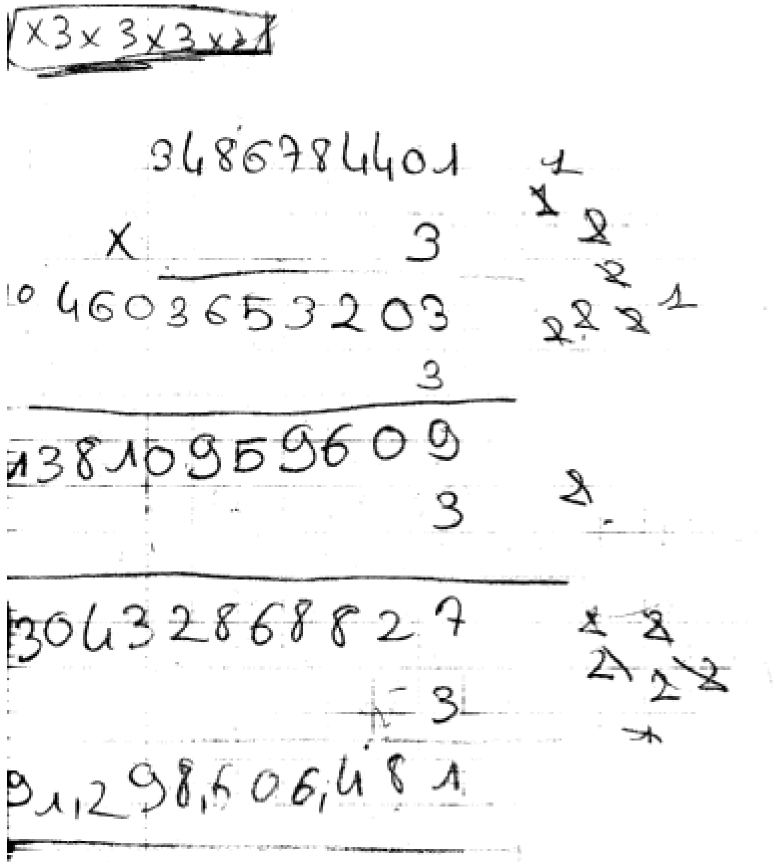
une erreur de calcul.
Le groupe explique alors son raisonnement. Nous reprenons tous ensemble son cheminement. Ceci me permet d'introduire pour tous les puissances de dix. Nous remarquons le fait suivant grâce au détails des calculs : 10^{10} s' écrit 1 suivi de 10 zéros... 10^{11} …1 suivi de 11 zéros....
Là encore ils voient l'intérêt d'utiliser la notation puissances
Les calculs des élèves sont justes mais pourquoi un résultat différent entre calculette et ordinateur ?
Un élève s'exclame : «L'ordinateur est plus puissant »
Ils finissent par comprendre que la calculette est limitée.
Je leur demande alors de justifier pourquoi il est impossible que 3^{24} soit égal à 282429536500000000000 (Résultat calculette)
Louis nous dit : « le résultat est un multiple de 3 et donc Yann rétorque: « Les deux derniers chiffres doivent être dans la table de 3 !» Yann doit confondre avec les multiples de 4.
J' annonce donc que 112 est alors un multiple de 3 selon la règle énoncée par Yann. Est ce vrai ?
Avec la calculette
$112 \div 3 \approx 37,333$
Alors comment reconnaître un multiple de trois ? La réponse ne vient pas. Je leur demande :
Comment reconnaître les multiples de deux?
Les multiples de 5 ? et de 9 ?
Finalement ils retrouvent le critère concernant la somme des chiffres.
On imagine que si personne ne retrouvait la règle, je leur aurais demander d' aller chercher dans leur livre, ou sur internet.
Revenons au problème.
Lorsqu'on fait la somme des chiffres de 282429536500000000000
On trouve 46 qui n'est pas multiple de 3.
Donc le nombre trouvé par la calculette n'est pas multiple de 3 ce qui est impossible pour 3^{24}
Nous essayons de vérifier si les nombres trouvés par la calculette à partir de 3^{21}
sont multiples de 3 ou non.
Nous trouvons

Au bout de	**Nombre trouvé par la calculette**	**Multiple de 3**
21 h	10460353200000000000	oui
22 h	31381059610000000000	non
23 h	94143178830000000000	oui
24h	282429536500000000000	non

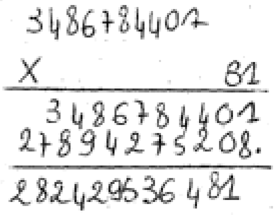
Certains élèvent pensent que si le nombre est multiple de 3 alors le résultat de la calculette est juste.
Je leur propose donc de réfléchir au brouillon sur le problème suivant
3^4 est égal à 333 est ce vrai ? 333 est il multiple de 3 ?
Un débat est alors amorcé. 333 est multiple de 3 (3×111) mais il n'est pas égal à 3^4 qui vaut $3\times3\times3\times3$ c'est à dire 81.

Nous ne pouvons pas affirmer que si les résultats trouvés par la calculette sont multiples de 3 alors ils sont justes.
Ce raisonnement n'est pas vraiment facile pour beaucoup d' élèves et pose problème.
Comment trouver alors la valeur de 3^{24} sans ordinateur ?
Nous pouvons posé les multiplications à la main.(idée de Caroline, élève très en difficulté en mathématiques)
Retour en groupes :
Les groupes essaient de trouver à la main les résultats ...certains disent c'est trop long …
je leur réplique ..alors trouve un moyen pour aller plus vite....

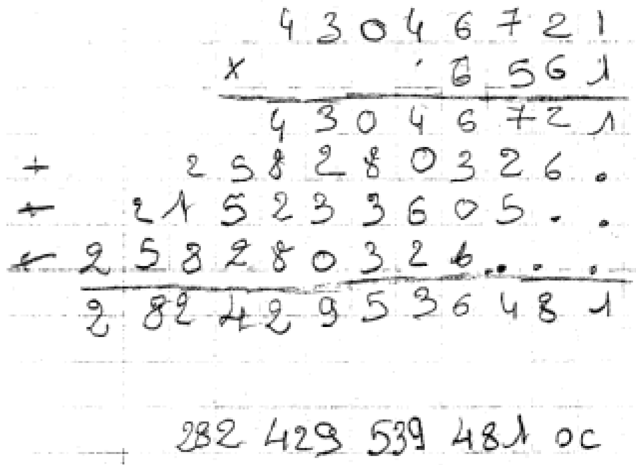
Tous les groupes finissent par trouver les résultats en posant à la main et en faisant des regroupements.



Ou encore …



Ou encore



Le groupe qui avait déjà entamé cette méthode continue son raisonnement et arrive au résultat assez rapidement ..je leur donne donc des exercices d' application sur la définition d'une puissance.
Travail pour la séance suivante : exercices sur la définition de la notation puissances (exercices du livre)

Séance 4 :

Pleinière :

Correction des exercices sur la notation puissance
exercice sur la différence entre a^n et $a \times n$
Fin de la correction de l' activité sur les bactéries: le groupe plus en avance explique que pour obtenir 3^{24} nous pouvons faire $3^{20} \times 3^4$
Nous nous arrêtons un instant pour travailler cette propriété.

Correction des recherches internet sur SOBIG

Qu'est-ce que Sobig ?

Sobig est un virus informatique qui a infecté en août 2003 des millions d'ordinateurs. Il utilisait une faille présente dans tous les systèmes d'exploitation Windows ultérieurs à Windows 95 de Microsoft.
Il est apparu sous 6 noms différents : Sobig.A, Sobig.B, Sobig.C, Sobig.D, Sobig.E, Sobig.F.
Il se réplique lui-même par le biais des courriels. Il utilise une technique dite d'email spoofing : il recherche aléatoirement une adresse électronique sur l'ordinateur infecté pour envoyer une copie de lui-même avec l'un de ces sujets :
- Re : Approved
- Re : Details
- Re : Re : My details
- Re : Thank you !
- Re : That movie
- Re : Wicked screensaver

SOBIG est un ver informatique.
Je leur montre une information trouvée sur internet :
« A chaque contamination SOBIG infecte 20 ordinateurs »
Je leur donne l' énoncé de la nouvelle activité sur SOBIG.
Enoncé 2 :

Activité 2 **Calculette et ordinateur interdits !!!**

Le virus « SOBIG.F » est un ver informatique qui se propage par e-mail. Il se présente sous la forme d'un message dont le titre est aléatoire et d'un fichier joint.

Au début un ordinateur est contaminé. Cette contamination donne lieu à l'infection de 20 autres ordinateurs (contamination numéro 1). Chaque ordinateur contaminé contamine à son tour 20 ordinateurs différents des premiers (contamination n°2), qui à leurs tours contaminent 20 autres ordinateurs…. (contamination n°3) Avec l'aide de l'indice, retrouvez combien d'ordinateurs sont infectés par SOBIG.F à la contamination n°24 ?

Dans cette activité, l' usage de la calculette et de l' ordinateur sont volontairement interdits. Les élèves comprennent donc qu'il va falloir calculer à la main. Chaque groupe a en sa possession un indice différent .

Je choisis l'indice que je donne aux groupes en fonction du niveau du groupe. Les groupes ont été formés par affinité . Cependant on peut remarquer que ces groupes correspondent (à part un seul) à des groupes de niveaux.

On imagine que si tel n 'avait pas été le cas , j'aurai effectué quelques changements de manière à avoir des groupes de niveaux.

Travail pour la séance suivante : exercices sur les propriétés des puissances (exercices du livre)

<u>Séance 5 :</u>

Correction des exercices.

Retour sur l' activité SOBIG !

Le modèle additif resurgit …..encore....alors même que nous avions corrigé des exercices mettant en exergue cette confusion...

Rapidement, ils se corrigent ...

Tous les groupes démarrent et comprennent le lien entre l'activité sur les bactéries et celle- ci.

Certains refont le tableau de correction en l'adaptant.

contamination n°... :	Ordinateur contaminer :	Notation :
0	X	X
1	20	$20^1 \times x$
2	20×20	
3	20×20×20	
4	20×20×20×20	
5	3200000 20×20×20×20×20	
6	20×20×20×20×20×20	
7	20×20×20×20×20×20×20	
8	20×20×20×20×20×20×20×20	
9	20×20×20×20×20×20×20×20×20	
10	20×20×20×20×20×20×20×20×20×20	
11	20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20	
12	20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20	

13	20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20
14	20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20×20
15	20^{15}
16	20^{16}
17	20^{17}
18	20^{18}
19	
20	20^{20}
21	20^{21}
22	20^{22}
23	20^{23}
24	20^{24}

Liste des indices :

Indice groupe 1

Au bout de la contamination n°6 SOBIG infecte 64 000 000 ordinateurs.

Proposé à un groupe de bon niveau...

Indice groupe 2

Au bout de la contamination n°8 SOBIG infecte 25 600 000 000 ordinateurs.

proposé à un groupe de bon niveau

Indice groupe 3

Au bout de la contamination n°19 SOBIG infecte 524288×10^{19} ordinateurs.

Au bout de la contamination n°5 SOBIG infecte 3 200 000ordinateurs.

proposé à un groupe de niveau faible.

Indice groupe 4

Au bout de la contamination n°20 SOBIG infecte $1\,048\,576 \times 10^{20}$ ordinateurs.

Au bout de la contamination n°4 SOBIG infecte 160 000 ordinateurs.

proposé à un groupe de niveau très faible

Indice groupe 5

Au bout de la contamination n°10 SOBIG infecte 1024×10^{10} ordinateurs.

proposé à un groupe de niveau moyen

Indice groupe 6

Au bout de la contamination n°26 SOBIG infecte 67108864 $\times 10^{26}$ ordinateurs.

Au bout de la contamination n°2 SOBIG infecte 400 ordinateurs.

proposé à un groupe contenant une très bonne élève et une élève moyenne.

L'objectif est de les obliger à dégager et à utiliser les propriétés des puissances étudiées en classe de 4e.

- $(a\times b)^n = a^n \times b^n$ pour a et b nombres relatifs , et n entier naturel.

  On l' utilise pour calculer $20^n = (2\times 10)^n = 2^n \times 10^n$

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$ pour a nombre relatif, n et p entiers naturels.
  On l'utilise avec l'indice 3 par exemple :
  $20^{24} = 20^{19}\times 20^5$

- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ a nombre relatif non nul, n et p entiers naturels
  avec dans cette activité $n > p$
  On l'utilise avec l'indice n°6
  $20^{24} = \dfrac{20^{26}}{20^2}$

- $(a^n)^p = a^{n\times p}$ nombres relatifs, n et p entiers naturels.
  On l'utilise avec l'indice 1 par exemple
  $20^{24} = 20^{6\times 4} = (20^6)^4$

L'un des problèmes majeur est de « gérer » tous les zéros qui apparaissent.
Certains indices sont donnés avec des puissances de 10. Il faut donc lire les nombres et en comprendre la signification, ce qui n'est pas facile pour eux.

0	1
1	20
2	400
3	8000
4	160000
5	3200000
6	64000000
7	108000000
8	21600000000
9	432000000000
10	8640000000000
11	17280000000000
12	3456000000000000
13	69120000000000000000
14	138240000000000000000000
15	2764800000000000000000
16	55296000000000000000000
17	110592000000000000000000
18	221184000000000000000000
19	442368000000000000000000
20	884736000000000000000000
21	1769572000000000000000000
22	35391440000000000000000
23	70782880000000000000000000000
24	141565760000000000000000000000

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 10000000000 \times 1024,$
1024

$1728 \times 2 = 3456$
$3456 \times 2 = 6912$
$6912 \times 2 = 13824$
$13824 \times 2 = 27648$
27648×2

$55296 \times 2 = 110592$
$110592 \times 2 = 221184$
$221184 \times 2 = 442368$
$442368 \times 2 = 884736$
$884736 \times 2 = 1769572$
1769572×2

$3539144 \times 2 = 7078288$
$7078288 \times 2 = 14156576$

Il a fallu du temps pour que les groupes comprennent l'usage des puissances de 10. Ils ajoutent les zéros....
Puis les enlève ….puis les remettent ….
L' utilisation des puissances de dix n'est pas si simple.
On voit surgir des erreurs insoupçonnées sur les nombres décimaux.
En effet, pour le groupe possédant l'indice n°3 ils traduisent 524288×10^{19} comme étant le nombre $52\,428\,800\,000\,000\,000\,000$ soit « 14 zéros derrière 524288 »
Je leur demande donc à l' oral pourquoi 14 zéros. Le groupe m ' explique qu'ils déplacent la virgule de 19 rangs vers la droite et la virgule pour eux se situe au niveau du 5 !
Un bilan est effectué pour tous sur les puissances de 10.

Notons que certains groupes sont bloqués par l'indice et préfèrent essayer de calculer sans. Cette étape leur permet de mieux appréhender l'énoncé.

L'utilisation de l'indice et l'interdiction de la calculette et de l'ordinateur les oblige à trouver des stratégies. Ils utilisent les propriétés des puissances.
Tous les groupes arrivent à mobiliser ces propriétés des puissances et arrivent au résultat.