

Rallye mathématique 2011

[14^e édition] Auvergne

Chers collégiens et lycéens d'Auvergne,
Le succès du "Rallye Mathématique d'Auvergne" n'a plus à faire ses preuves. Cette année encore, vous êtes près de 3 000 à y participer. Comme les années précédentes, l'équipe d'organisation du Rallye s'est mobilisée pour la phase qualificative de l'année 2011 et vous a élaboré des sujets aux thèmes variés et originaux. Elle espère que, tout en faisant preuve au sein de votre équipe, d'initiative, de perspicacité et aussi appel à vos connaissances et compétences, vous prendrez plaisir à les résoudre ainsi qu'à réaliser l'affiche qui vous est demandée.

Nous souhaitons bon courage à vous tous, et donnons rendez-vous aux futurs finalistes le 25 mai 2011 après midi !

Françoise Barachet,
IA-IPR en mathématiques
Agnès Duranthon,
IA-IPR en mathématiques
Catherine Tison,
IEN en mathématiques-sciences

➤ Contact

Anne Cruzier,
professeure de mathématiques,
membre de l'APMEP
anne.cruzier@ac-clermont.fr

22 mars 2011

Epreuves interclasses troisièmes et secondes

Les consignes

- Les calculatrices sont autorisées.
- La solution de chacun des 4 problèmes communs et des 2 sujets correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes
- Chaque feuille portera :
 - le nom de la classe,
 - le nom de l'établissement,
 - le numéro du problème,
 - ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Un des problèmes devra être illustré sur une affiche comportant le nom de la classe et de l'établissement. Cette affiche ne remplace pas la feuille réponse du problème.
- Le jury appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
 - l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
 - l'argumentation,
 - la présentation.

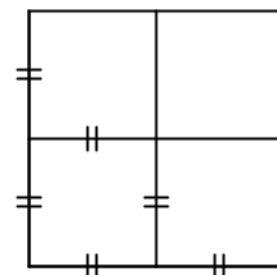
Sujets communs à tous les niveaux

(1) Découpages...

On dit qu'un carré est n -divisible, si on peut le découper en n carrés qui ont des côtés parallèles au carré initial.

Par exemple, un carré est 4-divisible.

Pour prouver qu'un carré est n -divisible, il suffit de donner un découpage d'un carré en n carrés.

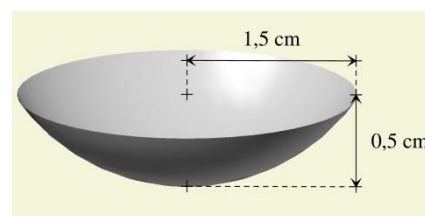


- 1) Montrer qu'un carré est 7-divisible
- 2) Montrer que dans le cas général, si un carré est n divisible, alors il est $(n+3)$ -divisible.
- 3) Montrer qu'un carré est 6-divisible
- 4) Montrer qu'un carré est 8-divisible.
- 5) Un carré est-il 46-divisible ? 47-divisible ? 48-divisible ?
- 6) Un carré est-il 2-divisible ? 3-divisible ?
- 7) Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels qu'un carré soit n -divisible.

(2) Le sirop

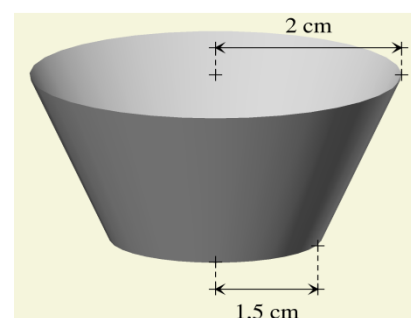
1. Une petite cuillère est fournie avec une bouteille de sirop pour la toux. Cette petite cuillère a la forme d'une calotte sphérique dont les dimensions sont portées sur la figure ci-contre.

De quelle longueur faut-il augmenter le rayon de la sphère « portant » la calotte sphérique pour que la contenance de la cuillère augmente de 9 % ?
Le volume d'une calotte sphérique est $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ où h est la hauteur de la calotte et r le rayon de la sphère.



2. Pour un autre sirop, la cuillère a la forme d'un tronc de cône dont les dimensions sont portées sur la figure ci-contre.

Quelle doit-être la hauteur arrondie au mm, de ce tronc de cône pour que le volume de la cuillère soit de 17 mL ?



(3) Les œufs

1. Ce mardi, un fermier compte les œufs que ses poules ont pondus ce matin.

Qu'il les compte 2 par 2, 7 par 7 ou 8 par 8 ; il lui en reste toujours le même nombre. Par contre, s'il les compte 5 par 5, il lui en reste 2.

Sachant que ses poules ne pondent jamais plus de 5 douzaines d'œufs par jour, combien d'œufs a-t-il ramassés ce matin ?

2. Ce même mardi, il rencontre son voisin ; celui-ci lui dit :

« - Moi aussi, je compte les œufs de ma production comme toi ; mais j'en ai plus. »

Sachant que la production du voisin est inférieure au triple de la production du premier fermier ; combien d'œufs le voisin a-t-il ramassés ce matin ?

3. Les deux fermiers se demandent s'ils peuvent appliquer leur méthode de calcul à l'ensemble de leurs deux productions du jour. Pouvez-vous les aider ?

(4) MOT TOM

MOT et TOM sont deux nombres de trois chiffres.

Une même lettre remplace le même chiffre.

Par quels chiffres faut-il remplacer les lettres M, O et T pour que l'égalité ci-dessous soit vraie :

$$3 \times \text{MOT} = \text{TOM} - 1 ?$$

Sujets collège

(5) Le triangle

ABC est un triangle équilatéral. D est un point quelconque du côté [BC].

- La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe [AC] en E ;
- la perpendiculaire à (AB) passant par E coupe [AB] en F ;
- la perpendiculaire à (BC) passant par F coupe [BC] en G.

1. Où faut-il placer le point D sur [BC] pour que G soit confondu avec D ?
2. Construire alors un triangle équilatéral ABC de côté 10 cm et y placer le triangle DEF.

(6) Course poursuite

Jérémy et Nadia ont tous deux reçu en cadeau des chaussures à ressorts, de modèles différents.

Le modèle *Super Jump* de Jérémy lui permet de faire un saut de 4 m en 2 secondes, à la suite de quoi les ressorts mettent une seconde à se remettre en place avant qu'il puisse commencer un nouveau saut.

Le modèle *Hop* de Nadia ne lui permet que de faire un bond de 3 m en une seconde, mais elle n'a pas besoin de s'arrêter entre les bonds.

Nadia est à 32 m de Jérémy lorsqu'elle décide de se lancer à sa poursuite. Elle ne peut « capturer » Jérémy que lorsqu'il est arrêté.

Dans combien de secondes, au minimum, pourra-t-elle le faire ?

Sujets lycée professionnel

(7) Le bon barème

Mme Ducarré, professeur de mathématiques, a imprudemment choisi un barème sur 37 points pour son contrôle. Il lui faut donc ensuite transformer les totaux obtenus, qui sont tous entiers, pour les ramener à une note sur 20.

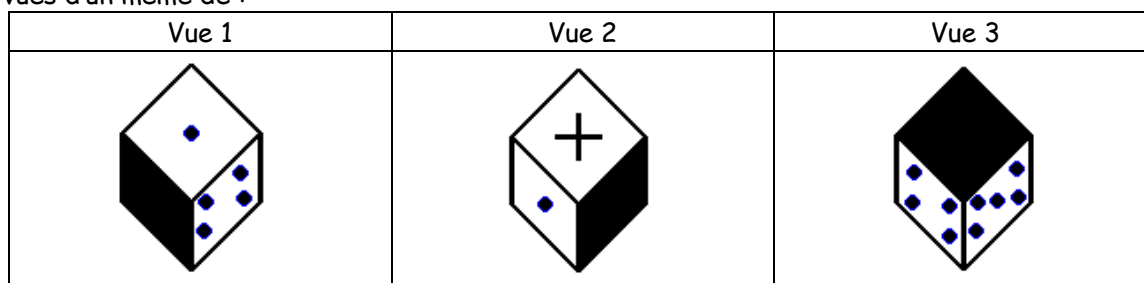
a) Expliquer pourquoi un élève dont le total sur 37 est 25 aura, en arrondissant au demi-point le plus proche, 13,5 sur 20.

b) Mme Ducarré est étourdie, et n'a pas sa calculatrice, au moment de mettre les notes définitives à ses élèves. Comme 37 est proche de 40, elle décide de diviser le total de points obtenus par 2, puis d'ajouter 0,5 points.

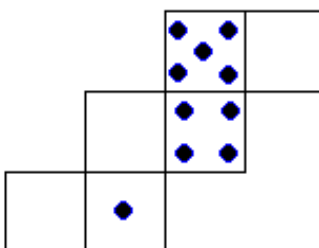
Certains élèves seront-ils lésés par cette façon de faire ? Si oui, lesquels ?

(8) Drôle de dé

Voici 3 vues d'un même dé :



- 1) Qu'y a-t-il sur la face inférieure de la vue 3 (la face opposée à la face noire)?
- 2) Recopier et compléter alors le patron ci-dessous :



Sujets lycée général et lycée technologique

(9) Un petit jeu.

Deux joueurs s'affrontent. Au départ, la situation est la suivante :

B	...	B		...		N	...	N
---	-----	---	--	-----	--	---	-----	---

Les pions blancs à gauche sont en nombre égal à celui des pions noirs à droite et il y a entre eux un certain nombre de cases vides.

Règles du jeu :

- Les blancs jouent les premiers.
- À chaque coup, les blancs peuvent déplacer n'importe lequel de leurs pions dans la première case vide à sa droite (s'il y en a une) et les noirs peuvent déplacer n'importe lequel de leurs pions dans la première case vide à sa gauche (s'il y en a une).
- Lors de son déplacement, il arrive donc qu'un pion saute par dessus un certain nombre de pions de n'importe quelle couleur, qui forment un bloc sans case vide.
- Si un joueur ne peut jouer aucun pion, il passe son tour, mais si un joueur peut jouer au moins un pion, il n'a pas le droit de passer son tour.
- Un pion ne peut pas revenir en arrière, ni s'arrêter sur une case déjà occupée, ni sortir du tableau.

Le gagnant est le premier joueur qui a transporté tous ses pions à la place qu'occupaient au début les pions de l'autre joueur.

Voici par exemple le début d'une partie, dans laquelle il y a quatre pions blancs, quatre pions noirs et trois cases vides :

B	B	B	B				N	N	N	N
B	B	B		B			N	N	N	N
B	B	B		B		N	N		N	N
	B	B	B	B		N	N		N	N
	B	B	B	B	N		N		N	N
	B	B		B	N	B	N		N	N
	B	B	N	B	N	B			N	N
	B	B	N	B	N		B		N	N

Etc.

1. Dans cette question, il y a deux pions blancs, deux pions noirs et une seule case vide.

B	B		N	N
---	---	--	---	---

Un des joueurs peut-il avoir une stratégie de jeu l'assurant de gagner quoi que fasse son adversaire ?

2. Même question pour le cas où il y a deux pions blancs, deux pions noirs et deux cases vides.

B	B			N	N
---	---	--	--	---	---

(10) Dialogue diagonal

Un rectangle dit à un carré : « Avez-vous remarqué que nous avons des diagonales égales ?

-- Certes, répond le carré, mais j'ai une aire de 36 cm^2 , ce n'est évidemment pas votre cas !

-- Qu'en savez-vous ?... », rétorque le rectangle, en appliquant une de ses diagonales sur une des diagonales du carré. Tous deux constatent alors que leur partie commune a une aire de 24 cm^2 .

Quelle est l'aire du rectangle ?