

À vous, maintenant, jeunes collégiens et lycéens d'Auvergne de faire preuve de vos qualités de réflexion, d'initiative, d'imagination ! Au sein de votre équipe, les connaissances et compétences de chacun seront nécessaires pour venir à bout des exercices originaux et astucieux que l'équipe d'élaboration des sujets vous a préparés.

Mais malgré les difficultés que vous allez rencontrer, vous devez en être persuadés, le succès est à votre portée !

**Bonne finale 2016 !**

**Françoise Barachet,**  
IA-IPR mathématiques

**Jean-Alain Roddier,**  
IA-IPR mathématiques

**Claire Marlias,**  
IEN-ET-EG mathématique-sciences

#### Contacts

**Anne Crouzier,**  
professeur de mathématiques,  
[anne.crouzier@wanadoo.fr](mailto:anne.crouzier@wanadoo.fr)

**Lucas Girard,**  
professeur de mathématiques,  
[Lucas.Girard1@ac-clermont.fr](mailto:Lucas.Girard1@ac-clermont.fr)

# Rallye Mathématique d'Auvergne 2016

## 19<sup>e</sup> édition

8 juin 2016

# Épreuves interclasses troisièmes et secondes

## Les consignes

- Les calculatrices et les ordinateurs sans accès internet sont autorisés.
- La solution de chacun des quatre problèmes communs et des deux sujets correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes.
- Chaque feuille portera :
  - ✓ le nom de la classe,
  - ✓ le nom de l'établissement,
  - ✓ le numéro du problème,
  - ✓ ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
  - ✓ l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
  - ✓ l'argumentation,
  - ✓ la présentation.
- Le jury appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.

# Sujet commun à tous les niveaux

## (1) Une histoire de parité

L'expression suivante est présentée à Rémi et Océane :

$$(((((((( ? \blacksquare ?) \blacksquare ?$$

Chaque point d'interrogation ? désigne un des dix chiffres de 0 à 9, chacun n'étant utilisé qu'une seule fois.

Chaque ■ désigne l'addition + ou la multiplication  $\times$ .

Règle du jeu :

Le joueur qui commence doit remplacer le premier ? à gauche par le chiffre de son choix.

Puis, à tour de rôle, chacun choisit un signe et un chiffre pour remplacer chaque couple ■ et ? suivant.

Le joueur qui a commencé gagne si le résultat final est pair.

Galant, Rémi laisse Océane commencer. Océane a-t-elle une stratégie gagnante ?

## (2) Le cône glacé

Erwan et Thierry se disputent sur la meilleure façon de partager en deux un cône glacé, en le coupant perpendiculairement à son axe. Ils sont déjà convaincus qu'il ne faut pas le couper par la moitié de la hauteur.

- « Car, déclare doctement Erwan, alors l'un de nous en aura -**Atchoum! Excusez-moi.**-- fois plus que l'autre »

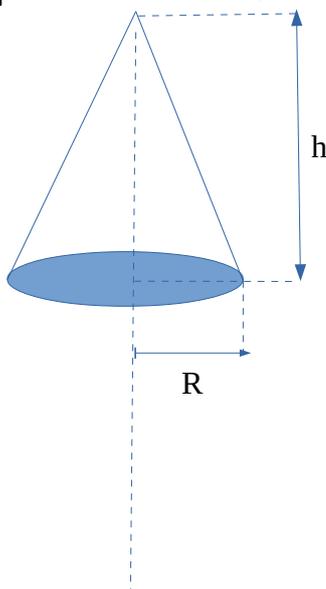
Comme Thierry a éternué au mauvais moment, nous n'avons pas compris du tout ce qu'a dit Erwan. Pouvez-vous remplacer « Atchoum » par le nombre adéquat ?

Pour effectuer un partage plus équitable, Erwan suggère de couper le cône aux deux tiers de sa hauteur. Thierry pense qu'il serait plus juste d'effectuer le partage aux quatre cinquièmes de celle-ci.

L'un des deux a-t-il vraiment raison ? Dans chacun des deux partages suggérés, vaut-il mieux avoir la pointe du cône, ou sa base ?

---

On rappelle ci-dessous la formule donnant le volume d'un cône.



Volume d'un cône :  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

### (3) Le puzzle

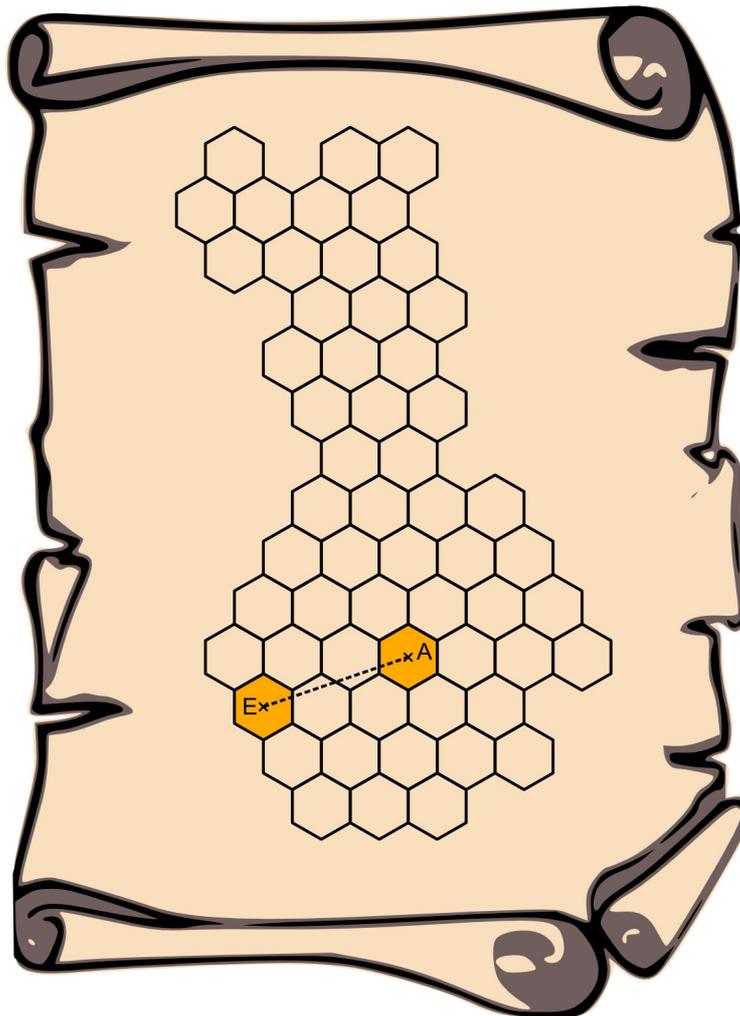
On considère cinq carrés identiques de côté  $a$ .

1°) Dans cette question, on suppose qu'on peut, en découpant ces cinq carrés, et en utilisant tous les morceaux obtenus à la façon d'un puzzle, obtenir un unique carré. Quel sera, en fonction de  $a$ , la longueur du côté du carré obtenu ?

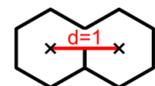
2°) Dans la feuille de papier quadrillé donnée, découper 5 carrés identiques. Leur taille doit permettre de reconstituer le grand carré sur une feuille de papier A4 sur laquelle vous porterez le nom de votre classe et votre établissement.

### (4) La carte au trésor

À proximité d'une ruche abandonnée, Jim l'abeille a découvert une carte au trésor.



- La distance entre deux alvéoles est la distance entre leurs centres.
- La distance entre deux alvéoles voisines vaut 1.
- La distance entre le trésor et l'alvéole A est un nombre entier supérieur ou égal à 4.
- Le trésor est caché au centre d'une alvéole représentée sur la carte.



On sait, de plus, que les alvéoles d'une ruche sont des hexagones réguliers.

1°) Que vaut la distance entre l'entrée E de la ruche et l'alvéole A ? (c'est la longueur du segment représenté en pointillés sur la carte).

2°) Quel est l'emplacement du trésor ?

# Sujet collègue

## (5) Et caetera

On décide d'écrire tous les nombres entiers les uns à la suite des autres, sans espace entre eux, comme ci-après :

1234567891011121314151617181920212223...

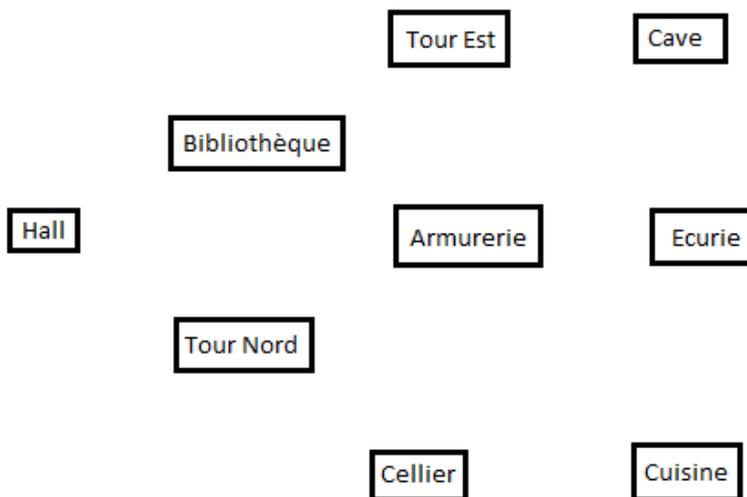
Quel est le millionième chiffre ?

## (6) Le labyrinthe

Neuf salles font partie d'un labyrinthe : Hall, Bibliothèque, Tour Est, Armurerie, Écurie, Tour Nord, Cave, Cuisine, Cellier.

On commence le jeu dans le Hall, un joueur gagne s'il termine sa partie en étant dans la cuisine. Pour se déplacer, on lance douze fois une pièce à deux faces, nommées « P » et « F », et on suit les indications de l'algorithme suivant :

si *Hall*  
    si P aller à *Tour Nord*  
    sinon aller à *Bibliothèque*  
si *Bibliothèque*  
    si P aller à *Tour Nord*  
    sinon aller à *Tour Est*  
si *Tour Est*  
    si P aller à *Tour Est*  
    sinon aller à *Cave*  
si *Cave*  
    si P aller à *Cave*  
    sinon aller à *Tour Est*  
si *Armurerie*  
    si P aller à *Ecurie*  
    sinon aller à *Armurerie*  
si *Tour Nord*  
    si P aller à *Cellier*  
    sinon aller à *Armurerie*  
si *Cellier*  
    si P aller à *Bibliothèque*  
    sinon aller à *Cuisine*  
si *Ecurie*  
    si P aller à *Cave*  
    sinon aller à *Cellier*  
si *Cuisine*  
    si P aller à *Cellier*  
    sinon aller à *Ecurie*



1°) Compléter le schéma du labyrinthe en dessinant les déplacements possibles indiqués par l'algorithme.

2°) Voici les tirages d'une partie sur laquelle Lucas, Julia et Thibault ont lancé 12 fois la pièce. Dans quelle salle ont-ils fini la partie ? Y a-t-il eu un vainqueur ? Si oui, lequel ?

Tirage de Lucas : P P P P F P F P P F F F

Tirage de Julia : P F P F P P F P F F P F

Tirage de Thibault : F P P F F F P P F F P F

# Sujet lycée

## (7) En voiture !

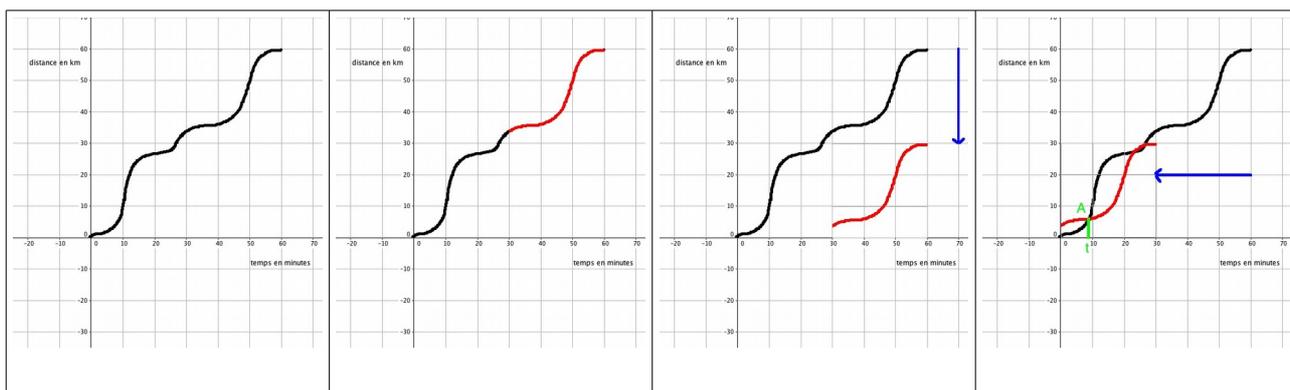
Albert a effectué avec sa voiture un trajet de 60 km en une heure. Il se demande s'il s'est trouvé, pendant ce trajet, un intervalle de 30 minutes au cours duquel il a parcouru exactement 30 km.

- « Ce n'est pas si évident, dit-il. Par exemple, il est tout à fait possible qu'il ne se trouve aucun intervalle de 40 minutes pendant lequel j'aie parcouru 40 km. »

Effectivement, Albert a raison. Pouvez-vous, vous aussi, trouver un exemple de progression au cours de laquelle il n'y a aucun intervalle de 40 minutes pendant lequel il aurait parcouru 40 km ?

- « Toutefois, pour un intervalle de 30 minutes, ajoute Albert, j'ai l'impression qu'il en va différemment.

- C'est certain. », lui dit son ami Hervé, qui lui explique pourquoi avec les schémas suivants :



Pendant les 30 minutes à partir du temps  $t$ , tu as parcouru exactement 30 km.

Justifiez l'affirmation faite par Hervé.

Pourquoi existe-t-il dans tous les cas au moins un point d'intersection  $A$  ?

- « D'accord, dit Albert, c'est très bien. Maintenant, j'aimerais bien en savoir plus. Existe-t-il un intervalle de temps de 15 minutes au cours duquel j'ai parcouru exactement 15 kilomètres ? un intervalle de temps de 20 minutes au cours duquel j'ai parcouru exactement 20 kilomètres ?

Expliquez comment, en adaptant la méthode d'Hervé, on peut répondre positivement à ces questions.

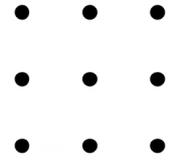
Pour quelles distances pouvez-vous utiliser cette méthode pour montrer qu'Albert a parcouru au moins une fois  $K$  kilomètres en  $K$  minutes ?

## (8) Le smartphone

Lorsque l'on allume un téléphone portable, on peut entrer un code secret (que seul l'utilisateur connaît) pour pouvoir le protéger.

Ce code est en général composé de 4 chiffres allant de 0 à 9 (ordre important, par exemple 2235 et 2532 sont deux codes différents).

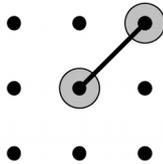
Pour certains smartphones, c'est un dessin à effectuer qui consiste à relier des points entre eux par des segments sans lever le doigt ; cela se fait sur une grille de 9 points, en partant de n'importe quel point :



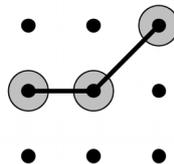
Quel est le minimum de points que l'on doit relier pour que le code avec dessin soit plus sécurisé que celui à 4 chiffres ?

Exemples :

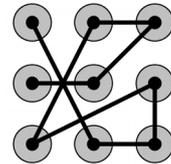
Code avec 2 points reliés :



Code à 3 points :



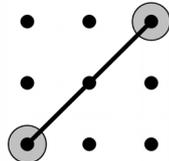
Code à 9 points :



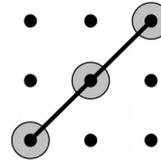
Attention :

→ Tout point sur lequel on passe pour la première fois est dit « validé » ; dès que l'on passe par un point non encore validé, il se valide :

Impossible

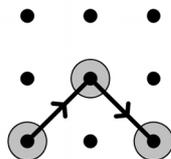


Correct



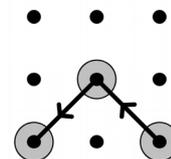
→ L'ordre de parcours des points est important :

Ce code à 3 points :



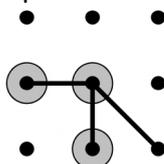
... est différent de ...

ce code à 3 points :



→ Un point n'est validé qu'une seule fois ; on peut repasser sur un point validé sans changer de direction :

Ce code à 4 points est impossible :



Ce code à 4 points validés est possible :

