DM n°2 TS1 année 2011-2012

<u>Exercice 1</u> : calcul des logarithmes à l'aide de l'algorithme CORDIC utilisé dans les premières calculatrices (COordinate Rotation for DIgital Computer), mis au point en 1959 par l'Americain Volder.

<u>Principe</u> : à l'aide d'un petit nombre de valeurs préenregistrées (en mémoire morte), calculer des valeurs approchées du logarithme de n'importe quel nombre réel strictement positif X.

k	$a_k = 1 + 10^{-k}$	$b_k = \ln(1+10^{-k})$
0	2	0,693 1472
1	1,1	0,095 3102
2	1,01	0,009 9503
3	1,001	0,000 9995
4	1,0001	0,000 1
5	1,00001	0,000 01
6	1,000001	0,000 001
7	1,0000001	0,000 0001

a- X s'écrit en notation scientifique sous la forme $X = x \times 10^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in [1,10[$.

En utilisant les propriétés de la fonction ln , on obtient $\ln X = \ln x + p \times \ln 10$

avec $\ln 10 \approx 2,3025851$

Il suffit ensuite de déterminer $\ln x$ à l'aide des valeurs du tableau ci-contre en utilisant une décomposition approchée de x sous la forme : $x \approx \dfrac{10}{c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n}$ où les c_i sont des constantes du type $a_k = 1 + 10^{-k}$. On obtient ainsi $\ln x$ à l'aide de soustractions des valeurs de la troisième colonne du tableau : $\ln x \approx \ln 10 - \ln c_1 - \ln c_2 - \dots - \ln c_n$

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer une valeur approchée de $\ln x$, en cherchant les c_i de proche en proche en construisant une suite de nombres x_i tels que :

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{x \times c_1}_{x_1} \times c_2}_{x_2} \times \dots \times c_n}_{x_n}$ se rapproche de 10 à 10^{-6} près.

```
algorithme
Entrée :   x   un réel compris entre 1 et 10
Initialisation :
    Liste u ( u(0) ;u(1) ;u(2) ;u(3) ;u(4) ;u(5) ;u(6) ;u(7))←(0,6931472;0,0953102;0,0099503;0,0009995;0,0001;0,00001;0,000001;0,0000001)
    k←0
    y←2,3025851
traitement
   Tant que  10-x  ≥ 10^-6 faire :
        Si x x(1+10^-k) ≤ 10 alors      test de la multiplication de x par 2 puis 1,1 ; 1,01 ; etc … pour approcher 10 sans le dépasser
           x ← x x(1+10^-k)
           afficher « a »               affiche les différentes valeurs de c_i sous la forme des a_k ( c'est-à-dire les (1+10^-k))
           afficher k                   i prend n'importe quelle valeur entière et compte le nombre de c_i (boucles)
           y ← y-u(k)                   k prend des valeurs entières comprises entre 0 et 7.
         Sinon
           k←k+1
        fin du Si
   fin du tant que
sortie
   afficher « ln x =»
   afficher y
```

Faire fonctionner l'algorithme <u>sans calculatrice</u> en utilisant le papier et le crayon pour x= 4,455 8911
(ne pas oublier que multiplier par 1,1 revient à ajouter au nombre le même nombre décalé d'une virgule! de même pour 1,01 et deux virgules…
Exemple : 9,802 960 4x1,1 =

$$\begin{array}{r} 9,802\,960\,4 \\ +\ 0,098\,02\,9\,6 \\ \hline \end{array}$$

).

Donner le nombre d'étapes et à chaque étape les valeurs des c_i et des x_i et enfin la valeur approchée de ln 4,455 8911.

b- Utiliser le logiciel algobox pour faire fonctionner cet algorithme sur ordinateur . (On peut le télécharger gratuitement sur internet). Vérifier les résultats obtenus au b- , puis utiliser le programme pour déterminer une valeur approchée de ln (9,071847 3) , ln4 et autres valeurs … que remarque-t-on sur le nombre des c_i ?

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  memorte EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
  memorte[0] PREND_LA_VALEUR 0.6931472:0.0953102:0.0099503:0.0009995:0.0001:0.00001:0.000001:0.0000001
  LIRE x
  k PREND_LA_VALEUR 0
  y PREND_LA_VALEUR 2.3025851
  TANT_QUE (10-x>=pow(10,-6)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (x*(1+pow(10,-k))<=10) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x*(1+pow(10,(-k)))
      AFFICHER "a"
      AFFICHER k
      y PREND_LA_VALEUR y-memorte[k]
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        k PREND_LA_VALEUR k+1
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "LN(X)="
  AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

c- Comment modifier le programme pour obtenir les valeurs des logarithmes des nombres n'appartenant pas à l'intervalle [1 ; 10[? le faire fonctionner , puis l'envoyer à Mme Boyer via les ENT …

Remarque : Ce TD est tiré d'un exercice de mon manuel de mathématiques Terminale C , chez Didier édition 1984 … !!!!